EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BATAVIA

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

15e JAARGANG 1939, Nr. 4.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Blz.

BERICHT. De tijd voor inzending van oplossingen van het werkstuk van Castillon (afl. III, blz. 153) is wat kort genomen; inzending kan geschieden tot 1 Mei 1939.

geweest. De imaginaire getallen bijv. hebben zich letterlijk aan de wiskundigen opgedrongen; men heeft er wel mee moeten rekenen, of men wilde of niet. En zoo is het vaak gebeurd, dat de intuitieve zekerheid het ten slotte gewonnen heeft van het twijfelende en tegenstribbelende verstand.

Moet dit eenerzijds worden toegegeven, anderzijds is het ook waar, dat vaak genoeg met een beroep op de intuïtie stellingen verkondigd zijn, die door de zich ontwikkelende wetenschap afdoende zijn weerlegd. Dat dit in den regel door dilettanten geschied is, ontslaat de mannen der wetenschap niet van hun plicht, kritisch te zijn ook tegenover hun eigen voortbrengselen. En dus rijst de vraag: Hoe kunnen wij weten, wat werkelijk een openbaring is uit het rijk der eeuwige ideeën en wat slechts een product is van onze op een dwaalspoor geleide fantasie?

Er is één kenmerk, dat van oudsher door de wiskundigen gebruikt is en waarvan de toepassing zeker een belangrijke waarborg geeft tegen ongebreideld fantaseeren. Dit bestaat hierin, dat elk nieuw in te voeren wiskundig object behoorlijk *gedefiniëerd* moet wezen; dat men nauwkeurig moet kunnen zeggen, welke eigenschappen het bezit en welke niet, zoodat men er over kan redeneeren, zonder zich in tegenstrijdigheden te verwikkelen. Het ligt voor de hand, dat men deze eisch stelt; en ook buiten het gebied der wiskunde doet, vooral in onzen tijd, het streven zich gelden, alle wetenschappelijke begrippen zoo grondig te analyseeren, dat ten slotte aan den genoemden eisch voldaan wordt. Hoe belangrijk het echter moge zijn, dat men dit programma zooveel mogelijk tracht te verwerkelijken, bij nadere beschouwing duiken ernstige moeilijkheden op. En dit is vooral het geval bij de studie van het *oneindige.*

Het rijk der ideeën bevat natuurlijk ook de getallen 1, 2, 3, 4, 5, ... Deze getallen nu zijn in oneindigen getale aanwezig, zij vormen een *oneindige rij;* en daar zij slechts een deel van het rijk der ideeën vormen, is dit rijk zelf oneindig; het is een *actueele oneindigheid,* zooals men zegt. De systematische studie der oneindige systemen (of oneindige *verzamelingen,* zooals de technische term luidt), is in de tweede helft der negentiende eeuw door Cantor ter hand genomen, en deze studie heeft tot zeer merkwaardige resultaten geleid.

De eenvoudigste oneindige systemen zijn wel de *oneindige getal-*

lenrijen; hiertoe behooren de boven reeds door ons beschouwde rijen:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{31}{32} \quad \ldots$$

en $\quad (1\frac{1}{2})^2 \quad (1\frac{1}{3})^3 \quad (1\frac{1}{4})^4 \quad (1\frac{1}{5})^5 \quad \ldots$

Cantor heeft nu echter aangetoond, dat deze oneindige rijen niet het eenige type van oneindige verzamelingen vormen. Er zijn ook verzamelingen, waarvan de elementen *niet* in een rij kunnen worden geordend. Dergelijke verzamelingen noemt men *onaftelbaar,* terwijl verzamelingen, waarbij zulk een ordening wel mogelijk is, *aftelbaar* heeten. Een voorbeeld van een onaftelbare verzameling is de verzameling van *alle* oneindige rijen van gebroken getallen. Immers, denken wij ons een oneindige rij, waarvan de elementen zelf oneindige rijen van breuken zijn. Wij construeeren nu een nieuwe rij van breuken op de volgende wijze: als eerste element nemen wij de helft van de eerste breuk uit de eerste rij; als tweede element nemen wij de helft van de tweede breuk uit de tweede rij, enz. Deze nieuwe rij verschilt van *elk* der rijen van de gegeven rij, en zij kan dus zelf niet tot de gegeven rij behooren. Maar dan kan de gegeven rij ook niet *alle* rijen van breuken bevatten; het systeem, dat door alle oneindige rijen van breuken gevormd wordt, is dus onaftelbaar.

Daar de ideeënwereld alle wiskundige objecten, dus ook alle oneindige rijen van breuken, in zich bevat, is zij zelf dus een onaftelbaar systeem. Deze uitkomst voert nu tot merkwaardige consequenties, zooals in het volgende blijken zal.

Op onze planeet leven ieder oogenblik slechts een bepaald aantal menschen; van dezen is er slechts een beperkt aantal, dat zich met het vormen van abstracte begrippen bezighoudt, en onder dezen is een nog geringer aantal, wien het voorrecht te beurt valt, een voor de menschheid *nieuw* begrip te ontdekken. Voor zulk een ontdekking is tijd noodig, en slechts nu en dan zal dus zulk een ontdekking gedaan worden. Wij komen dus tot de conclusie, dat elk uur slechts een beperkt aantal voor het menschdom nieuwe begrippen ontdekt zal worden. Wij kunnen nu alle begrippen, die in den loop der geschiedenis van het menschelijk denken ontdekt worden, chronologisch rangschikken naar den dag en het uur, waarin de ontdekking plaats greep. Mochten in eenzelfde uur meerdere nieuwe begrippen ontdekt zijn, dan kunnen wij *deze* bijv. alphabetisch rangschikken naar de woorden, waarmede zij

in een bepaalde taal worden aangeduid, of naar de namen der ontdekkers. Op deze wijze worden dus *alle* begrippen, die in de geschiedenis optreden, in één rij gerangschikt; deze begrippen vormen dus een aftelbare verzameling. Zooeven zagen wij echter, dat de verzameling van *alle* begrippen *onaftelbaar* is; er zijn dus oneindig vele begrippen, die nooit in eenig menschelijk brein opgedoken zijn en die er ook nooit in zullen opduiken. En al deze begrippen behooren tot de wereld der ideeën!

Tot een analoge conclusie komt men op de volgende wijze. Zooals wij boven zagen, stellen wij aan ieder begrip in beginsel den eisch, dat het vatbaar is voor een nauwkeurige definitie. Wij kunnen de begrippen nu rangschikken naar het minimum aantal letters, dat voor de formuleering van hun definitie noodig is. Daar men een eindig aantal letters slechts op een eindig aantal wijzen kan rangschikken, zullen met een bepaald aantal letters slechts een bepaald aantal begrippen gedefiniëerd kunnen worden; *deze* kan men nu weer ordenen, door bijv. hun definities in alphabetische volgorde te rangschikken. Op deze wijze kan men ten slotte alle begrippen, die in menschelijke taal gedefiniëerd kunnen worden, in één rij rangschikken; deze begrippen vormen dus een aftelbare verzameling. En daar de verzameling van *alle* begrippen onaftelbaar is, zijn er oneindig vele begrippen, die niet behoorlijk in menschelijke taal kunnen worden gedefiniëerd!

Hoe verrassend deze uitkomst misschien bij eerste kennismaking moge klinken, bij verder nadenken komt men wel tot het inzicht, dat zij geenszins nieuw is; ja, eigenlijk hadden wij niet anders kunnen verwachten. Immers, hoe zijn Socrates en Plato tot het denkbeeld van de ideeënwereld gekomen? Doordat zij tot het inzicht kwamen, dat juist van de voor ons gevoel belangrijke begrippen — de goedheid, de deugd, de dapperheid, enz. — een behoorlijke definitie uiterst moeilijk, ja onmogelijk is. Deze begrippen doen sterk denken aan de objecten der natuurlijke wereld, welke ons telkens nieuwe eigenschappen openbaren, naarmate wij hen nader leeren kennen, zonder dat het onderzoek ooit afgeloopen is. En daarom beschouwden de genoemde denkers deze begrippen eveneens als objecten, welke echter behooren tot een onzienlijke wereld.

De leer der oneindige verzamelingen voert echter nog tot andere

consequenties, die nog veel bedenkelijker zijn. De verdeeling der oneindige verzamelingen in aftelbare en onaftelbare is namelijk slechts een eerste stap om te komen tot een hiërarchische indeeling der oneindige verzamelingen. Cantor is er namelijk in geslaagd, de begrippen „grooter" en „kleiner" op *oneindige* verzamelingen toe te passen. Zijn uitgangspunt hierbij was de opmerking, dat men van twee eindige hoeveelheden onderzoeken kan, welke de grootste is, zonder dat het noodig is, de beide hoeveelheden ieder afzonderlijk te tellen. Stellen wij ons bijv. voor, dat ik een enorme volksmenigte voor mij heb, uit mannen en vrouwen bestaande, en dat ik wil weten, welke van de beide seksen het sterkst vertegenwoordigd is. Hiertoe geef ik het bevel, dat elk der mannen een der vrouwen bij de hand moet nemen, zoodat er zich paren vormen. Zijn er nu evenveel mannen als vrouwen, dan zal na eenig heen-en-weerloopen ieder een partner hebben gevonden, zoodat geen enkelingen overblijven; in het tegengestelde geval kan ik onmiddellijk nagaan, welke sekse in de meerderheid is, want van déze blijven er een aantal over. Dit geheele procédé is nu ook op twee *oneindige* verzamelingen van toepassing; ook hierbij kan men de elementen der beide verzamelingen met elkander paren, en nagaan, van welke verzameling er elementen overblijven. Men zegt nu, dat de verzameling, van welke er elementen overblijven, een *grootere machtigheid* heeft dan de andere. (De omstandigheid, dat zulk een paring op meerdere wijzen mogelijk is, brengt complicaties met zich mede, waarop wij hier niet in zullen gaan, daar zij het beginsel niet aantasten).

Zij nu een zekere oneindige verzameling gegeven. Wij kunnen nu de elementen van die verzameling op allerlei wijzen tot kleinere groepen samenvoegen, wij kunnen m.a.w. zoogenaamde *deelverzamelingen* van de gegeven verzameling vormen; en vervolgens kunnen wij het systeem van al deze deelverzamelingen beschouwen. Cantor heeft nu bewezen, dat de verzameling van *alle* deelverzamelingen van een gegeven verzameling een grootere machtigheid heeft dan de gegeven verzameling. Een bijzonder geval hiervan is de stelling, dat de verzameling van alle rijen van breuken een grootere machtigheid heeft dan de verzameling van alle breuken. Welke zijn nu de consequenties van deze stelling?

Wij hebben in het voorafgaande herhaaldelijk gesproken van het rijk der eeuwige en onveranderlijke ideeën. Spreekt men een

oordeel uit, waarin een eigenschap van zulk een idee wordt uitgedrukt, dan is dit een *waar* oordeel; men kan het rijk der ideeën dus ook beschouwen als het rijk der eeuwige waarheden. Nu zal een waarheid in den regel bij nadere analyse uit tal van waarheden blijken te bestaan; omgekeerd zal een systeem van waarheden als één samengestelde waarheid kunnen worden opgevat. Nu bezit echter volgens Cantor het systeem van alle verzamelingen van waarheden een grootere machtigheid dan het systeem van alle waarheden; het zal dus gebeuren, ja zelfs oneindig vele malen, dat een verzameling van waarheden niet een waarheid, maar een onwaarheid oplevert! En als het rijk der ideeën alle waarheden bevat, bevat het dus automatisch oneindig vele onwaarheden, ja zelfs veel meer onwaarheden dan waarheden!

Nog wonderlijker is de volgende conclusie. Men zou zoo zeggen, dat, wanneer een systeem van objecten gegeven is, die alle tot het rijk der ideeën behooren, dit systeem zelf toch ook tot dit rijk behooren zal, dus ook een object van het ideeënrijk zal wezen. Maar volgens Cantor heeft de verzameling van alle systemen van objecten uit het rijk der ideeën een grootere machtigheid dan de verzameling van alle objecten uit dit rijk; hieruit volgt, dat een systeem van objecten uit het ideeënrijk bijna nooit zelf tot dit rijk zal behooren. Dit is toch wel eenigszins in strijd met de gewone voorstelling van een in zich rustend en afgesloten rijk van eeuwige prototypen van alle bestaande en denkbare dingen!

Hiermede is de tragedie afgeloopen. Het rijk der ideeën, dat eerst zoo stralend en bijna tastbaar voor ons geestesoog oprees, heeft eerst zijn aanschouwelijkheid, toen een goed deel van zijn kenbaarheid en denkbaarheid verloren, en is ten slotte ondergegaan in een duisternis van valschheden en tegenstrijdigheden. Maar wanneer wij na dezen ondergang tot bezinning komen, kunnen wij ons afvragen, of deze catastrophe werkelijk te betreuren is. Is dat rijk der eeuwige ideeën werkelijk ooit iets meer geweest dan een phantasmagorie? Is het werkelijk ooit in staat geweest, onze behoeften te bevredigen?

Om deze vraag te beantwoorden, wil ik een systeem bespreken, dat als het ware als een verkleinde afbeelding van het rijk der ideeën kan worden opgevat; een afbeelding, waarbij het oneindige rijk der ideeën in het eindige geprojecteerd is. Ik bedoel het

systeem van *alle boeken,* die in de Nederlandsche taal kunnen worden geschreven. Dat dit systeem *eindig* is, is gemakkelijk in te zien. Hiertoe preciseeren wij eerst wat nader, wat onder een „boek" verstaan moet worden. Voor het drukken van een boek zijn noodig gewone letters en hoofdletters, en wel rechtopstaande, cursieve, vette letters, enz.; verder leesteekens, cijfers, benevens nog een aantal andere teekens en symbolen. Stel, dat aldus 300 verschillende teekens noodig zijn, dan is dit toch wel welletjes. Verder zullen wij afspreken, dat een „boek" hoogstens 1000 bladzijden zal mogen bevatten, ieder met hoogstens 5000 teekens; meer omvangrijke werken moeten dan maar in verschillende deelen gesplitst worden, die ieder afzonderlijk moeten worden geteld. Welnu, dan is het maximum-aantal boeken in onze taal:

$$300^{5000000}.$$

Denken wij ons deze bibliotheek eenmaal bijeengebracht, dan zal nooit eenig boek in onze taal kunnen verschijnen, dat niet reeds in die bibliotheek aanwezig is; alle couranten, die in de toekomst zullen worden gedrukt, bevinden zich daar reeds; alle wetenschappelijke ontdekkingen en alle uitvindingen zijn daar te vinden. Wij kunnen onze bibliotheek dus zeker vergelijken met het rijk der ideeën, waar zich immers ook reeds alles bevindt, wat ooit door menschen zal kunnen worden bedacht.

Om eenig nader inzicht in onze bibliotheek te krijgen, gaan wij de boeken rangschikken en nummeren. Tot de „teekens", waarmede de boeken gedrukt zijn, behoort natuurlijk ook de tusschenruimte tusschen twee woorden. Het boek no. 1 uit onze bibliotheek zal nu dat werk zijn, bij het drukken waarvan enkel die tusschenruimte gebruikt is; dus een boek, dat niets dan blanco bladzijden bevat. Het boek no. 2 zal eveneens eerst niets dan leege bladzijden hebben, maar rechts onderaan de laatste bladzijde een letter a; boek no. 3 bevat niets dan rechts onderaan de laatste bladzijde een letter b, enz. Dan komen boeken, waarin zich rechts onderaan de laatste bladzijde *twee* letters bevinden, en zoo gaat het door.

Wanneer wij over deze situatie verder nadenken, komen wij tot een verbijsterende ontdekking; een ontdekking van dezelfde soort als die, welke zooven het rijk der ideeën voor ons deed ineenstorten. Namelijk de ontdekking, dat bijna alle boeken uit onze bibliotheek vrijwel niets anders bevatten dan zinlooze lettercombinaties;

en degene, waarbij nog woorden en zinnen te bespeuren zijn, bevatten grootendeels niets dan onzin en wartaal. Zooeven zagen wij, dat alle couranten, die in de toekomst gedrukt zullen worden, in onze bibliotheek te vinden zijn; maar daarnaast bevinden zich couranten, met dezelfde opschriften en data, die alle mogelijke valsche berichten bevatten, en daarnaast weer andere, die niet te lezen zijn door de onzinnige drukfouten. En elk middel, om het eene van het andere te scheiden, ontbreekt!

Hieruit volgt, dat het volkomen onmogelijk is, onze bibliotheek werkelijk te *raadplegen,* er werkelijk iets in *op te zoeken.* Een boek over een bepaald onderwerp in onze bibliotheek te vinden, vordert evenveel, ja nog veel meer moeite, als het zelfstandig schrijven van dit boek kosten zou. Immers, om een boek te vinden, moet men eerst die boeken uitkiezen, waarvan de *eerste* letter met die van het verlangde boek overeenstemt; hieronder moet men dan degene uitkiezen, waarvan de *tweede* letter dezelfde is als die van het verlangde boek, en zoo moet men doorgaan. Om dus het boek te kunnen vinden, moet men de volledige inhoud van het boek reeds kennen, m.a.w. men moet het boek reeds bezitten. Anders uitgedrukt: bij iedere nieuwe letter heeft men precies dezelfde vrijheid van keuze bij het verdere zoeken, als men heeft bij het zelf schrijven van het boek; een boek uit onze bibliotheek voor den dag brengen *beteekent* het boek zelf schrijven!

Uit deze laatste overwegingen kan duidelijk geworden zijn, welke fout wij eigenlijk in het voorafgaande gemaakt hebben. Een bibliotheek, die werkelijk bruikbaar zal zijn, waarin men werkelijk wat vinden kan, moet zeker zeer veel, maar *mag* niet *alles* bevatten. Alleen een selectie kan het denken in bepaalde banen leiden, kan het stimuleeren, kan van waarde zijn voor iemand, die zelf met de problemen worstelen wil. En zoo iemand kan zijn gedachten ten slotte neerschrijven, zoodat een *nieuw* boek ontstaat, dat nieuw in de bibliotheek kan worden opgenomen. En zoo zal de bibliotheek zelf groeien en in zijn samenstelling telkens den stand van het onderzoek afspiegelen.

En zoo kunnen wij thans weer terugkeeren tot de wereld der ideeën. Dat er zulk een wereld bestaat, vanwaar krachten uitgaan, die ons denken stimuleeren en leiden, — daarvan ben ik overtuigd. Een tweede vraag is, of wij deze wereld moeten zoeken in de diepten van ons eigen innerlijk, of op de een of andere wijze buiten

ons. Hierop zullen wij niet ingaan; het is m.i. trouwens zeer de vraag, of hier van een tegenstelling sprake is. Maar een fout hebben wij zooeven begaan, toen wij die wereld *statisch* dachten, als iets eeuwig onveranderlijks, dat dan ook *alles* bevatten moest, dat ooit in een menschelijk brein zou kunnen opkomen. Wij hebben gezien, in welke tegenstrijdigheden deze voorstelling ons verwikkelde. Veeleer moeten wij de wereld der ideeën *dynamisch* denken, als iets, dat groeit, dat voortdurend rijker en gedifferentiëerder wordt, en dat in voortdurende, levende wisselwerking staat met het bewuste denken der levende menschen. Hiermede in harmonie is de leer, die bijv. in allerlei occultistische stelsels verkondigd wordt, dat de onzienlijke wereld een *levende* wereld is, die voortdurend met de stoffelijke wereld in wisselwerking staat, en die zelf schooner en rijker wordt, naarmate zij zich in de stoffelijke wereld beter openbaren kan.

En de wiskunde zelf is dus niet enkel een beschrijving, een soort „natuurlijke historie" van een vaststaande, onveranderlijke werkelijkheid. De wiskunde is het product en tegelijk het instrument van een scheppende evolutie, die zoowel de innerlijke als de uiterlijke werelden in haar stroom meevoert; haar objecten zijn niet eens voor altijd geschapen, maar zij vermenigvuldigen zich, vereenigen zich, vloeien samen en scheiden zich van elkander in een voortdurende groei. En de wiskundigen op aarde mogen zich de dragers wefen van die evolutie; zij kunnen dankbaar beseffen, dat hun bewuste scheppingen die onzichtbare groei volgen, weerspiegelen èn bevorderen.

---

[1]) In de discussie, die op de voorafgaande voordracht volgde, werd door een der aanwezigen den spreker verweten, dat hij den mensch scheppingskracht zou toeschrijven. Dit is geenszins mijn bedoeling geweest. Ik heb alleen willen betoogen, dat zich in de ontwikkeling der wiskunde een Scheppende Macht openbaart, waarvan de beoefenaren der wetenschap de organen zijn. Hoe men zich deze Macht nader moet denken — dit is een kwestie van wereldbeschouwing en godsdienstige overtuiging. Een nadere bespreking van deze vraag zou ons voeren tot de vraagstukken van het verband tusschen de Goddelijke Almacht en de menschelijke vrijheid, van de praedestinatie, van het begrip „openbaring" enz. enz. Maar mijn eigenlijke bedoeling was dan ook, het denkbeeld op te wekken, dat zelfs voor de discussie van dergelijke vragen eenige wiskundige kennis noodzakelijk is; om echter niet op theologisch terrein te komen, heb ik als voorbeeld de Platonische leer der ideeënwereld genomen.

GRAFISCHE OPLOSSING VAN DE VERGELIJKING $\sqrt{a_1x - b_1} \pm \sqrt{a_2x - b_2} \pm \sqrt{a_3x - b_3} = 0$

DOOR

Dr. O. BOTTEMA.

Wij geven in het volgende een grafische oplossing en een discussie van de irrationale vergelijking

$$\sqrt{a_1'x' - b_1'} \pm \sqrt{a_2'x' - b_2'} \pm \sqrt{a_3'x' - b_3'} = 0 \qquad (1)$$

en beperken ons daarbij tot het gebied der *reële getallen*. Wij stellen $a' = a_1' + a_2' + a_3'$ $b' = b_1' + b_2' + b_3'$, en nemen voorlopig aan, dat $a' \neq 0$ is.

Is $b' \leqq 0$, dan gaat door de transformatie

$$x' = x'' + p,$$

waarbij $p < \frac{b'}{a'}$ gekozen wordt, als $a' > 0$ en $p > \frac{b'}{a'}$ genomen wordt, als $a' < 0$ is, de uitdrukking $a_i'\, x' - b_i'$ over in $a_i\, x'' - (b_i' - a_i'\, p)$, dus in $a_i'\, x'' - b_i''$, waarbij $\Sigma b_i'' = \Sigma\, (b_i' - a_i'\, p) = b' - pa' > 0$. Wij kunnen ons dus beperken tot het geval $b' > 0$.

Door de transformatie $x' = \frac{b'}{a'}\, x$, gaat $a_i'\, x - b_i'$ over in $b'\, (a_i\, x - b_i)$, waarbij $a_i = \frac{a_i'}{a'}$, $b = \frac{b_i'}{b'}$; daar $b' > 0$ is, wordt dus (1) vervangen door

$$\sqrt{a_1x - b_1} \pm \sqrt{a_2x - b_2} \pm \sqrt{a_3x - b_3} = 0 \qquad (2)$$

waarbij $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $b_1 + b_2 + b_3 = 1$. *Deze vergelijking* (2) *zullen wij verder beschouwen.* Haar eventuele wortels zijn ook wortels van de vergelijking, die uit (2) ontstaat door herhaald kwadrateren, nl.

$(a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 - 2a_2a_3 - 2a_3a_1 - 2a_1a_2)\,x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 +$
$+ a_3b_3 - a_2b_3 - a_3b_2 - a_3b_1 - a_1b_3 - a_1b_2 - a_2b_1)\,x + (b_1^2 +$
$+ b_2^2 + b_3^2 - 2b_2b_3 - 2b_3b_1 - 2b_1b_2) = 0$ . . . . . . (3)

Wij passen nu de volgende meetkundige afbeelding toe. De getallen a_i, opv. b_i beschouwen wij als de coördinaten van een punt A opv. B in het vlak V van een gelijkzijdige driehoek PQR, waarvan de hoogte als lengteeenheid wordt genomen, en wel als de van teken voorziene afstanden van A opv. B tot de zijden van deze driehoek. Met elke vergelijking (2) correspondeert dus een *puntenpaar* van V. Het geval, waarbij A en B samenvallen kan verder buiten beschouwing blijven; men heeft dan $a_i = b_i$ en de vergelijking (3) heeft alleen de wortel 1.

Stelt men

$$y_1 = a_1x - b_1, \qquad y_2 = a_2x - b_2, \qquad y_3 = a_3x - b_3, \qquad (4)$$

dan zijn, bij veranderlijke waarde van x, de getallen y_i evenredig met de coördinaten van een punt P, gelegen op de verbindingsrechte AB. Daar $y_1 + y_2 + y_3 = x - 1$ is, is P voor $x = 1$ het oneigenlijke punt der rechte; voor de coördinaten z_i van een eigenlijk punt heeft men

$$z_i = \frac{y_i}{x-1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Het punt P ligt op de rechte AB blijkbaar zó, dat

$$\frac{PB}{PA} = x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

De getallen y_i moeten voldoen aan

$$\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

of wel aan

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2y_2y_3 - 2y_3y_1 - 2y_1y_2 = 0 \quad . \; . \quad (8)$$

Deze vergelijking in de homogene coördinaten y_i stelt een kegelsnede K voor, die de zijden van driehoek PQR in de middens raakt. K is dus de *ingeschreven cirkel* van driehoek PQR.

Wij krijgen dus de volgende grafische oplossing van (3): *door de getallen a_i en b_i zijn de punten A en B bepaald; als de rechte AB de cirkel K snijdt in de punten S_1 en S_2, dan zijn $x_1 = \frac{S_1B}{S_1A}$ en $x_2 = \frac{S_2B}{S_2A}$ de wortels van de vergelijking (3)* (fig. 1).

De vergelijking (3) *heeft dus* 2, 1 *of* 0 *wortels, al naar gelang AB de cirkel K snijdt, raakt of buiten K ligt.*

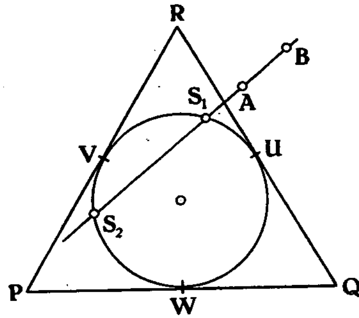


Fig. 1.

Daar alle reële punten van K eigenlijk zijn, kan de wortel $x = 1$ (als A en B verschillend zijn) niet voorkomen; ligt B op K, dan is een der wortels nul; ligt A op K, dan is de vergelijking (3) lineair.

Beschouwen wij nu de vergelijking (2) of (7). Een wortel van (3) is niet noodzakelijk een wortel van (2), daar wegens onze beperking tot reële getallen, de radicanten niet negatief mogen zijn. Nu ligt de cirkel K geheel binnen driehoek PQR; hieruit volgt, dat de coördinaten y_i van een punt van K alle hetzelfde teken hebben (tenzij één ervan nul is). Wij krijgen dus: *is* x_0 *een wortel van* (3) *dan zijn de drie uitdrukkingen* $a_1x_0 - b_1$, $a_2x_0 - b_2$, $a_3x_0 - b_3$ *of alle positief, of alle negatief,* met deze uitzondering, dat één van het drietal *nul* kan zijn.

Uit (5) volgt nu onmiddellijk: *een wortel* x_0 *van de vergelijking* (3) *is dan en alleen dan een wortel van één der irrationale vergelijkingen* (2) *als* $x_0 > 1$ is.

Of meetkundig: *vergelijking* (2) *heeft alleen dan een wortel, als AB de cirkel K snijdt in een punt S, zodanig, dat A tussen S en B ligt.* Liggen A en B beide binnen de cirkel, dan is er dus één wortel; ligt A binnen en B buiten de cirkel, dan is er géén wortel; liggen A en B in deze volgorde op het verlengde van een koorde, dan zijn er twee wortels, enz.

Tot nu toe hebben wij in (2) alle tekencombinaties toegestaan. Van de vier mogelijke combinaties kunnen wij het geval, dat alle tekens + zijn buiten beschouwing laten; de vergelijking is dan vals (als A en B verschillend zijn). De overige drie gevallen zijn

gelijkwaardig, zodat wij ons kunnen beperken tot de vergelijking:

$$\sqrt{a_1x - b_1} + \sqrt{a_2x - b_2} - \sqrt{a_3x - b_3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wij moeten daarvoor op K die punten bepalen, waarvoor de coördinaat y_3 groter of gelijk is aan elk der beide andere coördinaten. Zijn U, V en W de raakpunten van K met QR, RP en PQ, dan zijn $y_2 = y_3$ en $y_1 = y_3$ opv. de vergelijkingen van de rechten PU en QV. De gevraagde punten zijn die van de cirkelboog UV. Wij krijgen dus: *de vergelijking* (9) *heeft dan en alleen dan een wortel, als de rechte AB de boog UV snijdt in een punt S zodanig, dat A tussen S en B ligt.* Het aantal wortels kan uiteraard 2, 1 of 0 bedragen. In fig. 1 is het geval getekend, waarbij (9) één wortel heeft, nl. $x_1 = \frac{S_1B}{S_1A}$. Het getal $x_2 = \frac{S_2B}{S_2A}$ is wortel van $-\sqrt{a_1 x - b_1} + \sqrt{a_2 x - b_2} + \sqrt{a_3 x - b_3} = 0$.

Wij hebben aanvankelijk het geval $a' = 0$ uitgesloten. Is $a' = 0$ en $b' \neq 0$, dan kan men door de transformatie $x' = \frac{1}{x}$ de rol van A en B verwisselen. Zijn a' en b' beide nul, dan is AB de oneigenlijke rechte van het vlak; de vergelijking is vals.

Het bovenstaande onderzoek kan in twee richtingen worden uitgebreid.

De vergelijking $\sum_3 \sqrt{a_i x^2 + 2 b_i x + c_i} = 0$, kan worden opgelost door K te snijden met de kegelsnede, die door de parametervergelijkingen $y_i = a_i x^2 + 2 b_i x + c_i$ wordt voorgesteld.

De vergelijking $\sum_4 \sqrt{a_i x - b_i}$ kan behandeld worden door haar af te beelden op een puntenpaar AB in de ruimte. Met de ingeschreven cirkel K uit het platte vlak komt dan overeen het oppervlak van de vierde graad, beschreven in het coördinatenviervlak, en met de irrationale vergelijking: $\sum_4 \sqrt{y_i} = 0$; dat is de *Romerfläche* van Steiner.

KORRELS.

XXXV. OVER DE BEHANDELING VAN DE LOGARITHMEN.

Bij het gebruik van de logarithmen in de klas blijkt dikwijls, dat de machinale vaardigheid daarin bij de meeste leerlingen wel aanwezig is, maar het hun ontbreekt aan het besef, wat men bij een logarithmische berekening eigenlijk doet. Het komt mij voor, dat, naast de onder de leerlingen zeer algemene voorliefde voor gedachteloos werken met een makkelijk recept, de gebruikelijke leerboeken daaraan enige schuld dragen. Na behandeling van de eigenschappen van de logarithmen en vele voorbeelden, waarin deze gehele getallen of eenvoudige breuken zijn, komt, na een opmerking, dat in het algemeen de logarithmen onmeetbaar zijn, plotseling het gehele leger in gesloten gelederen uit de lucht vallen. Hier is een sprong, die de leerling niet meemaakt. Hij leert er mee werken, maar het verband met de theorie is hem niet bewust, het voortdurend besef, dat hij niets anders doet, dan zijn getallen schrijven als machten van tien.

Dit hiaat tracht ik op de volgende wijze te vullen. Na er op gewezen te hebben, dat een eigenlijke macht van 3 nooit *gelijk* kan zijn aan een eigenlijke macht van 2, laat ik zien, dat men gemakkelijk twee machten van 2 kan vinden waar 3 tussen ligt en die weinig van elkaar verschillen, en wel door in twee lijsten van de machten van 2 en 3 ongeveer gelijke getallen op te zoeken. Deze lijsten kan men de leerlingen zelf laten maken; het opzoeken van de weinig verschillende machten is zeer animerend.

Men vindt achtereenvolgens b.v.

$$3^{12} > 2^{19} \qquad\qquad 3 > 2^{1,583}$$
$$2^{17} < 2^{27} \qquad\qquad 3 < 2^{1,589}$$

waaruit volgt, dat als men 3 als macht van twee wil schrijven, de exponent tussen 1,583 en 1,589 moet liggen. Kan die exponent niet beter benaderd worden? Ja:

$$3^{29} < 2^{46} \qquad\qquad 3 < 2^{1,587}.$$

Zo verder gaande kan men de vereiste exponent zo nauwkeurig benaderen als men maar wil.

(Hieraan kan zich vastknopen, wat men wil zeggen over de vraag van het al of niet bestaan van zulk een exponent en over de analogie met het vroeger behandelde geval van de wortels als getallen, die men niet „uit"rekenen, maar wel benaderen kan. Maar daarover heb ik het hier niet.)

Op deze manier kan men dus 3 bij benadering als een macht van 2 schrijven met behulp van *twee* machtentabellen. De leerlingen zien nu direct in, dat men met één machtentabel een getal bij benadering als macht van 10 kan schrijven:

$$3^{21} > 10^{10} \qquad 3 > 10^{0,4761}$$
$$3^{23} < 10^{11} \qquad 3 < 10^{0,4783}$$
$$3^{44} < 10^{21} \qquad 3 < 10^{0,4773}$$
$$3^{109} > 10^{52} \qquad 3 > 10^{0,4770}$$

Het is natuurlijk te bewerkelijk, de tabel van de machten van 3 compleet voort te zetten tot de 44ste en 109de macht. Maar dat is ook niet nodig. Men kan zo te werk gaan. Men merkt op

$$3^{22} < 31,4 \times 10^{9} \qquad 3^{44} < 986 \times 10^{18} < 10^{21}$$
$$3^{22} > 31,3 \times 10^{9} \qquad 3^{44} > 979 \times 10^{18} \qquad 3^{88} > 958 \times 10^{39}$$
$$3^{21} > 1045 \times 10^{7}$$

dus $$3^{109} > 1001 \,.\, 10^{49} > 10^{52}.$$

Met een beetje zoeken vindt men gemakkelijk machten, waarvan het product dicht tot een macht van 10 nadert.

Hebben de leerlingen eenmaal gezien, dat men bruikbare machten vinden kan, die tot een benadering van de logarithme leiden, dan kan men de vereiste exponenten verder eenvoudig meedelen en laten zien, dat het uitkomt. Zelf vindt men ze door de logarithme in een kettingbreuk te ontwikkelen en de naderende breuken af te leiden.

Voor log 6 heeft men b.v. zonder al te veel gereken

$$6^{4} = 1296 > 10^{3}$$
$$6^{5} = 7776 < 10^{4}$$
$$6^{9} = 10077696 > 10^{7}$$

waaruit:

$$6 > 10^{\frac{3}{4}} \text{ of } 6 > 10^{0,75}$$
$$6 < 10^{\frac{4}{5}} \text{ of } 6 < 10^{0,80}$$
$$6 > 10^{\frac{7}{9}} \text{ of } 6 > 10^{0,7777}.$$

Verder heeft men:

$$6^7 = 279936$$
$$6^{10} = 60466176$$

of

$$6047.10^4 > 6^{10} > 6046.10^4$$
$$3657.10^{12} > 6^{20} > 3656.10^{12}$$
$$1337.10^{28} > 6^{40} > 1336.10^{28}$$
$$1788.10^{59} > 6^{80} > 1784.10^{59}$$
$$3197.10^{121} > 6^{160} > 3182.10^{121}$$
$$5717.10^{183} > 6^{240}$$
$$3458.10^{191} > 6^{250}$$
$$9680.10^{196} > 6^{257}$$
$$6^{320} > 1012.10^{246}$$

$$6^{257} < 10^{200} \qquad 6^{320} > 10^{249}$$
$$6 < 10^{\frac{200}{257}} < 10^{0,77821} \qquad 6 > 10^{\frac{249}{320}} > 10^{0,77812}$$

Voor log 7 vindt men achtereenvolgens:

$$\log 7 > \frac{5}{6} > 0,8333$$
$$\log 7 < \frac{11}{13} < 0,8539$$
$$\log 7 < \frac{17}{20} < 0,8500$$
$$\log 7 > \frac{16}{19} > 0,8421$$

en verder nog met wat meer gereken:

$$\log 7 > \frac{60}{71} > 0,84507$$
$$\log 7 < \frac{371}{439} < 0,845103.$$

Maar misschien is men met de laatste benaderingen voor log 6 en log 7 al aangeland bij het betere, dat de vijand is van het goede.

Batavia. J. H. LEYDS.

XXXVI. EEN ONGELIJKHEID IN EEN DRIEHOEK.

Bij een meetkundige behandeling van de *hyperbool* kan de volgende hulpstelling dienst doen: *is E een punt van de zwaartelijn CD van driehoek ABC waarbij AC > BC, dan is AC—BC > AE — BE.*

Het bewijs voor deze stelling is niet zeer eenvoudig (zie b.v. Haalmeijer, Leerboek der Vlakke Meetkunde, 2e deel, pg. 145/46).

Hier volgt een meetkundig bewijs, dat gebruik maakt van een *spiegeling* ten opzichte van een rechte.

Ligt een punt P binnen driehoek ABC, dan is AC + BC > AP + BP; hieruit volgt onmiddellijk: *liggen C_1 en C_2 op een rechte door het midden S van AB en is $C_1S > C_2S$, dan is $AC_1 + BC_1 > AC_2 + BC_2$.*

Beschouwen wij nu een punt E op de zwaartelijn CD van driehoek ABC, waarbij AC > BC (fig. 1). Wij spiegelen A in de middelloodrechte van EC, m.a.w. *wij construeren de driehoek A'CE congruent met driehoek AEC.* De rechte BA' snijdt DC (of haar verlengde) in S; AA' en DC zijn evenwijdig, dus S is het midden van A'B. Daar AC > BC, is ∠ ADC stomp, de projectie A'' van A op CD ligt dus op het verlengde van CD. Is M het midden van CE, dan is AA' = 2 A''M, dus DS = ½ AA' = A''M > DM, zodat ES > CS. Uit de bovengenoemde stelling volgt dan A'E + BE > A'C + BC, dus AC + BE > AE + BC of AC — BC > AE — BE.

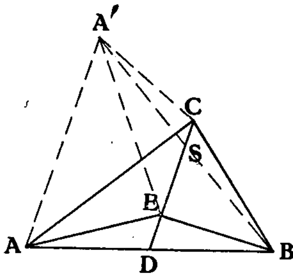


Fig. 1.

O. BOTTEMA.

XXXVII.

Talrijke planimetrische constructies kunnen, zoals wel bekend zal zijn, eenvoudiger worden uitgevoerd dan in de gebruikelijke leerboeken wordt gedaan.

De eenvoudigste constructies hebben dikwijls het bezwaar, dat voor het bewijs eigenschappen gebruikt moeten worden, die op

P. WIJDENES

ALGEBRA VOOR MULO

Door velen nagevolgd, door niemand overtroffen.

I. **30e druk,** 139 blz. . . . geb. f 1,40

IIA. **11e druk,** 148 blz. . . . geb. f 1,50

IIA. Verkorte uitgave van de
11e druk, 90 blz. . . . . geb. f 1.—

IIB. **12e druk,** 243 blz. . . . geb. f 2,25

I en **IIA** verkort geven de **volledige stof** voor het A-examen.

VOORBERICHT

bij de verschijning in 1913 van I en II; II is in 1917 gesplitst in II A en II B.

Zooals de titel reeds aanduidt, is dit werkje bestemd om gebruikt te worden op M. U. L. O.-scholen en op andere inrichtingen van onderwijs met beperkt wiskunde-programma: H. B. S. voor Meisjes, Normaalscholen, Technische scholen enz. Het onderwijs op die scholen eischt m. i. boeken, die juist geven, wat men daar bereiken wil; neemt men uitgebreider boeken, dan moet veel worden overgeslagen en dat mag voor de theorie zooveel niet hinderen, het doorwerken van de vraagstukken blijft echter een voortdurende bron van moeite en last, daar men telkens vastloopt op zaken, die niet behandeld worden. Geheel in overeenstemming hiermee wensch ik op te merken, dat dit werkje ook niet ontstaan is door uit mijn

grootere werken heele stukken en de moeielijke vraagstukken weg te laten, maar dat het geheel onafhankelijk daarvan bewerkt is; zoo zal men slechts hier en daar een vraagstukje ontdekken, nauwelijks één op de twintig, dat ook in die grootere werken staat.

Met een paar zeer bekwame en deskundige hoofden van M. U. L. O.-scholen had ik reeds menigmaal over het ontwerpen van een boekje als dit gesproken; dank zij hun voorlichting en de bestudeering van het programma voor de M. U. L. O.-examens en de examenopgaven der laatste jaren en...... niet het minst door mijn eigen werkzaamheid thans aan een H. B. S. met 3-jarigen cursus (welker leerlingen in ontwikkeling niet of niet noemenswaard verschillen van de M. U. L. O.-leerlingen) meen ik, dat dit boekje vrij wel weergeeft, wat men redelijkerwijs kan eischen.

Ik heb gedacht de theorie te moeten beperken tot het hoogst noodige, dikwijls slechts tot het geven van eenige uitgewerkte voorbeelden, naar welker model de leerlingen de volgende vraagstukken moeten maken; het aantal vraagstukken, waarbij telkens heele series gelijksoortige voorkomen, is vrij groot: de zelfwerkzaamheid van den leerling wordt daardoor bevorderd; anders zit hij om de twee of drie vraagstukjes telkens vast en dat is voor de kinderen ontmoedigend en voor den onderwijzer, die dikwijls tijdens de stille werkzaamheid van de eene afdeeling een andere afdeeling mondeling les geeft, uiterst lastig. Ook is het de beste manier om het geleerde er in te krijgen.

DE ONTVANGST

Enige van de vele besprekingen:

Deze aardige boekjes, gebonden in keurig mooie bandjes met vergulden titel, zullen ongetwijfeld op die scholen, waarvoor de schrijver ze bestemde, wel opgang maken. De algebraische leerstof wordt duidelijk en klaar besproken, zoodat die zonder veel moeite het eigendom van den leerling zal worden; wij wijzen hier om maar iets te noemen, op de behandeling van merkwaardige producten en ontbinding in factoren, in § 35—§ 47 van het 1e stukje.

Het 1e stukje bespreekt de algebra tot en met de vergelijkingen van den eersten graad met twee en meer onbekenden en bevat meer dan 1000 opgaven en vraagstukken.

Het 2e begint met de vierkantsworteltrekking uit getallen, waarna de wortelvormen, vierkantsvergelijkingen, ,de eigenschappen harer wortels, gebroken en negatieve exponenten, logarithmen, samengestelde interest, onbepaalde vergelijkingen, machten van een binomium

(driehoek van Pascal), achtereenvolgens een beurt krijgen. Dit boekje geeft daarenboven ter toepassing der behandelde leerstof nog meer dan 800 goed gekozen vraagstukken.

Heeren docenten in Wiskunde aan scholen voor m. u. l. o. enz. verzuimen niet met deze pennevrucht des heeren Wijdenes kennis te maken.

H. v. H. *De Katholieke School.*

Een eenvoudig werkje, dat op bevattelijke wijze de beginselen der Algebra behandelt. Eene korte theoretische uiteenzetting gaat aan ieder Hoofdstukje vooraf, waarna ter toepassing eene gansche reeks opgaven volgt. Dit is goed gezien. Juist door oefening, door herhaalde toepassing wordt het geleerde het eigendom van den leerling. *Schoon de schrijver naar beperking heeft gestreefd, geeft het werkje toch genoeg voor het diploma M. U. L. O. (B)!* Eene reeks Examenopgaven, zoowel van M. U. L. O. als van de H. B. S. met 3-jarigen cursus, besluit het tweede deeltje. *Die deze werkjes met zijne leerlingen g o e d doorgewerkt heeft, behoeft wat Algebra betreft, niet bevreesd te zijn,* dat zij op 't Examen voor dit vak onvoldoende zullen bekomen. *Een net en stevig bandje maakt, dat de boekjes ook uitwendig de aandacht trekken.*

Onze Vacatures.

Twee uitstekende boeken, waarin de algebra op eenvoudige wijze wordt behandeld, en die een groot aantal vraagstukken en oefeningen bevatten ter toepassing.

Antwoorden op deze oefeningen zijn mede apart verkrijgbaar.

Het Katholieke Schoolblad.

De schrijver geeft in deze boekjes kleine stukjes theorie, gevolgd door reeksen opgaven. Te moeilijke onderwerpen zijn terecht achterwege gelaten. Vooral voor jeugdige beginners moet men zijn verwachtingen niet te hoog spannen. Ze leeren door het „doen" het meest en het best. Daarom kan men in 't begin de opgaven niet licht te eenvoudig nemen.

De kennismaking met deze boekjes, die er ook uiterlijk allerliefst uitzien, kan ik ten zeerste aanraden.

R. v. W. Pzn. *School m/d Bijbel.*

Het kenmerkende van dit boekje is: de theorie is kort en krachtig, geen gebazel, maar opschieten. Een kort resept gaat vooraf aan elke

nieuwe bewerking, vaak met verwijzing naar de gelijknamige bij de rekenkunde.

't Lijkt me een genot dit boekje te gebruiken. De antw. zijn alleen voor leraren en ze zijn goed.

F. B. *De Volksschool.*

Aan 't uiterlijk dezer boekjes is veel zorg besteed: ze zijn sierlijk gebonden en zeer netjes gedrukt. En 't komt ons voor, dat ze deze keurige verzorging verdienen wegens de deugden van hun innerlijk. Als men spreken kon van aanschouwelijke Algebra — of voorzoover men daarvan spreken kan — zou men dit werkje zoo kunnen noemen.

Tot bl. 47 van het tweede deeltje is noodig voor diploma A van de examens M. U. L. O.; de opgaven van die examens in de jaren 1907—1912 vindt men in het tweede deeltje op bl. 45 tot bl. 47; de rest bovendien voor diploma B; in de Herhaling bl. 89 tot bl. 114, 2e deeltje vindt men de opgaven van de examens M. U. L. O. in de jaren 1907—1912 en de eindexamens van de Eerste H. B. S. met driejarigen cursus te Amsterdam gedurende de jaren 1902—1912.

Openbare School.

Zeer zeker bruikbare boekjes. Een korte zakelijke inhoud met veel opgaven. 't Tweede deeltje bevat nog een samenvatting van alle in de boekjes voorkomende formules.

Ten slotte de opgaven van de examens M. U. L. O. voor diploma B voor de jaren 1907—1912, en de vraagstukken v. d. eindexamens H. B. S. driej. cursus te Amsterdam van de jaren 1902—1912.

De druk is uitstekend. De uitvoering prachtig. In hun rood linnen bandje zien de boekjes er aantrekkelijk uit.

V. *Het Schoolblad.*

Dit deeltje is in denzelfden geest bewerkt als het eerste: beknopte, maar duidelijke theorie en veel opgaven. Hierbij zijn die van de M. U. L. O.-examens A en B en van de Eindexamens der 1ste H. B. S. met 3-j. c. te Amsterdam. De besproken onderwerpen zijn: vierkantsvergelijkingen; gebroken en negatieve exponenten, logarithmen; samengestelde intrest; onbepaalde vergelijkingen en binomium.

De leerlingen, die dit deeltje goed hebben doorgewerkt, kunnen gerust aan het examen deelnemen; zij zullen voor algebra geen slecht figuur maken.

V. *Het Schoolblad.*

BIJ DE SNEL OPVOLGENDE HERDRUKKEN:

Onveranderde druk: dat wil hier zeggen, dat deze druk naast de vorige kan worden gebruikt, wat een zeer groot voordeel is voor een schoolboek. Niettemin heeft de schrijver aan dezen druk toegevoegd eenige afzonderlijke paragrafen, naar aanleiding van de mondelinge examens voor diploma A van 1918. Zoo blijft het op de hoogte van den tijd, en zal het zijn weg naar den 8en druk vinden.

K. t. B. *De Nederlander.*

Vijf drukken in vier jaar tijds! Commentaar overbodig. We wenschen schr. en uitgever met dit uitstekend leerboekje bij voortduring een alleszins verdiend succes.

B. F. Z. *Christelijk Schoolblad.*

De *eerste druk* verscheen *Januari 1913,* deze *tiende* in *1920* en dat wel zoo goed als ongewijzigd. Meer behoeven we zeker niet te zeggen.

De Christelijke Onderwijzer.

Dat wil er in! En dan 4 drukken, die geheel gelijk zijn, die men naast elkaar kan gebruiken. Wat 'n buitenkansje!

De Chr. onderw.

Hèt algebra-boek voor mulo-scholen. In vijf jaren vijf drukken! In dit deeltje zijn de formules en regels op een apart blaadje bijeengevoegd. 't Is goed om deze formules te laten memoriseeren. Daartoe het losse blad.

Het Kath. Schoolbl.

De eerste druk van dit mooie boekje verscheen in 1913 en werd door ons in dit weekblad gunstig besproken. Dat na twee jaren een derde druk noodzakelijk is, bewijst wel, dat *Wijdenes Algebra* op de scholen voor M. U. L. O. een gunstig onthaal vindt, zoodat verdere aanbeveling overbodig kan geacht worden.

De *Antwoorden* zijn „uitsluitend voor leeraren" bestemd. Dat deze een 2en druk beleven, pleit eveneens voor een druk gebruik op vele inrichtingen van onderwijs.

H. v. H. *Kath. school.*

Naar aanleiding van een vorige druk schreven we: „'t Lijkt ons een genot deze boekjes te gebruiken." 't Schijnt, dat er meer zo over gedacht hebben en zich er wel bij bevinden, getuige de snel elkaar opvolgende herdrukken.

Van deel I kunnen de 4 drukken naast elkaar gebruikt worden.

In deel II is enige verandering gekomen met het oog op de eisen voor dipl: M. U. L. O. A en B.

De eig. van de wortels ener vierk. verg. zijn verschoven van B naar A, alsook: de ontbinding van $x^2 + p\,x + q$."

F. B. *De Chr. school.*

De eerste druk verscheen in 1913. De achtste in Sept. 1919. De negende nu! 't Wijst op een reusachtig debiet. En dat debiet is wel verdiend. Bij ondervinding weet ik, dat de leerlingen graag uit dit boekje werken. De vraagstukken vorderen niet eindeloos gecijfer. Ze zijn kort. En goed gerangschikt. Daardoor hebben de leerlingen succes met hun werk. En de ambitie wordt gaandeweg grooter.

N. v/h Noorden.

Het is geen eenvoudige taak een beoordeeling te schrijven over den vierden druk van een werkje, geschreven door een uiterst bekwaam schrijver. Het boekje, dat de stof helder, eenvoudig en overzichtelijk behandelt, lijkt me uitnemend geschikt voor het technisch lager onderwijs.

F. W. *Het zoeklicht.*

Geen algebraboek voor M. U. L. O. en soortgelijke scholen hebben we met meer genoegen gebruikt dan dit, waarvan elk jaar een herdruk noodzakelijk is.

Het Kath. schoolbl.

Wel het meest gebruikte werkje voor Algebra op de M. U. L. O.-scholen.

Corresp.bl. v/d V. voor Mulo.

Volgende drukken werden als volgt aangekondigd.

I. 19e druk.

Het feit alleen, dat dit boekje binnen 15 jaar negêntien drukken mocht beleven, zegt genoeg. Deze 19e druk is gelijk aan de vorige, zoodat alle drukken naast elkaar kunnen worden gebruikt. Het is een schoolboek voor Algebra, dat, ook voor de Indische Mulo, alle aanbeveling verdient.

Het M. U. L. O.

Negentiende druk...... dus bekend genoeg. Veel gebruikt, en met reden.

t. B. *Chr. Sch.bl. Onze Vacatures.*

22e druk.

Deze druk is ongewijzigd. Reeds vroeger hebben we onze meening hierover gezegd.

Gezien het aantal verschenen drukken, zal verdere aanbeveling ook wel overbodig zijn.

Corr.blad.

Dit zeer geschikte boekje heeft ook bij dezen herdruk geen veranderingen ondergaan.

R. van W. *De School met den Bijbel.*

25e druk.

Een jubileum, nl. de 25ste druk. Nog altijd ongewijzigd. Als steeds aanbevolen.

De School m/d Bijbel.

29e druk.

Het eerste deeltje is overbekend en wordt op heel veel U. L. O.-scholen gebruikt; het aantal herdrukken zegt genoeg. Het boekje is vrijwel onveranderd gebleven; alleen is een toegift van 120 herhalingsvraagstukken toegevoegd.

Van het tweede deeltje kan dit niet gezegd worden, het is aanzienlijk bekort; het geeft nu alleen de A-stof en na de Schriftelijke Opgaven voor het M. U. L. O.-examen een groot aantal gemengde opgaven.

De deeltjes I en II A kunnen nu in elk opzicht voor de U. L. O.-scholen aanbevolen worden; d.w.z. voor de A-candidaten. Het spreekt

vanzelf, dat de boekjes het keurige uiterlijk hebben, dat we gewend zijn.

B. *De Bode.*

II A werd op overeenkomstige manier aangekondigd als I en II B.

II B. 6e druk.

Evenals het eerste deeltje maakt ook dit tweede deeltje een aangename indruk. *De theorie wordt er duidelijk en overzichtelijk behandeld.*

L. S. *Tijdschr. R.K. Ouders en Opvoeders.*

Het voorbericht meldt, dat de beide werkjes Algebra voor M. U. L. O. I en II B ruimschoots voldoende geven voor de beide diploma's — en een volkomen veilige gids zyn voor de examens A. en B. — Het aantal drukken bewijst, dat het boekje gaat. De groote waarde ligt m.i. in de verzameling v r a a g s t u k k e n.

De 6e druk kan naast de 4e en de 5e gebruikt worden.

De Nederlander.

7e druk.

De veelgebruikte „Algebra" behoeft niet nader besproken te worden.

De Kath. School.

8e druk.

Geeft voldoende voor de diploma's A en B. Een groote hoeveelheid oefenstof. Ook als repetitie-boek uitstekend geschikt.

De Nijverheidsschool.

9e druk.

Slechts enkele geringe wijzigingen werden aangebracht. Gaarne aanbevolen.

Corr.blad.

Deze 9e druk wijkt niet veel af van den vorigen druk. De examenopgaven zijn aangevuld, waartegenover staat, dat enkele H. B. S.-examens 3-j. cursus vervallen zijn. Bovendien is een paragraaf ingelascht over interpoleeren. Waar deze uitgave blijkens 't aantal drukken zich op onze scholen een goede naam verworven heeft, is verdere aanbeveling overbodig.

B. *Correspondentieblad.*

Het is een uitgave speciaal voor verschillende inrichtingen met beperkt wiskunde-programma. Aanbevolen.

......„Herwaarts".

11e druk.

In deze nieuwe druk zijn weer enkele verbeteringen aangebracht. We noemen o.a. de eigenschappen van de logarithmen en het limietbegrip. Het laatste wordt op bevattelijke wijze voor jonge leerlingen behandeld, wat natuurlijk niet uitsluit, dat mondelinge toelichting door den leraar voor de meeste leerlingen nodig zal zijn. Het boekje bevat een groot aantal opgaven voor herhaling. Verder zijn de opgaven van de schriftelijke examens voor Diploma A en B over de laatste 23 jaar opgenomen. Tevens een aantal vragen van mondelinge examens, zowel voor A als B. De gebruikers vinden ten slotte nog de examen-vraagstukken van de eindexamens der 1e H. B. S. met drie-jarige cursus te Amsterdam van de jaren 1912—1934.

Voor B-Candidaten het aangewezen werkje.

T. d. V. *De School met den Bijbel.*

DE VERKORTE UITGAVE VAN II A.

Het eerste deeltje is overbekend en wordt op heel veel U. L. O.-scholen gebruikt; het aantal herdrukken zegt genoeg. Het boekje is vrijwel onveranderd gebleven; alleen is een toegift van 120 herhalingsvraagstukken toegevoegd.

Van het tweede deeltje kan dit niet gezegd worden, het is aanzienlijk bekort; het geeft nu alleen de A-stof en na de Schriftelijke Opgaven voor het M. U. L. O.-examen een groot aantal gemengde opgaven.

De deeltjes I en II A kunnen nu in elk opzicht voor de U. L. O.-scholen aanbevolen worden; d.w.z. voor de A-candidaten. Het spreekt vanzelf, dat de boekjes het keurige uiterlijk hebben, dat we gewend zijn.

B. *De Bode.*

11e druk.

Deze Elfde Druk in verkorte uitgave ontleent zijn ontstaansrecht aan wat in het voorbericht aldus is uitgedrukt: „Voor diploma A kunnen we met minder dan de helft van uw Algebra voor M. U. L. O. A volstaan" (uit een brief a. d. schrijver);

„......alles in overeenstemming met de vastgestelde leerstof......";

„Aan het slot vindt men 25 stellen opgaven van de examens M. U. L.O., 10 mondelinge examens en nog een algemene herhaling van 200 vraagstukken......";

„Bij de samenstelling van de mondelinge examens en de algemene herhaling heb ik mij ook met volle instemming gehouden binnen de grenzen, die de Vereniging voor M. U. L. O. zo juist heeft getrokken."

In 46 bladz. worden behandeld, afgewisseld door een voldoend aantal opgaven: Vierkantsworteltrekking; Wortelvormen; Vierkantsvergelijkingen en Eigensch. v. d. wortels van een v.k.v.. Daarachter volgt bovengen. repetitie- en toetsstof.

Valcooch.

In zijn „Voorbericht" vertelt de schrijver, hoe hij er door een opmerking van een correspondent toe gekomen is, zijn oorspronkelijke M. U. L. O.-boekje voor het A-diploma belangrijk te vereenvoudigen. Vooral uit het onderdeel der wortelvormen is heel wat verwijderd. Nu is het geheel in overeenstemming gebracht met de eisen van het examen.

In deze nieuwe vorm ziet het boekje er uitstekend uit. De theorie is zeer sober, maar goed. Het aantal vraagstukken is uitgebreid. Het boekje eindigt met een belangrijke serie examenopgaven, zowel voor het schriftelijk als voor het mondeling examen.

Als gewoonlijk is de technische uitvoering uitstekend.

Aanbevolen.

C. *De School v. N. O. I.*

DE UITGEWERKTE ANTWOORDEN.

„De antwoorden zijn alle uitgewerkt verschenen. Ik benijd volstrekt niet den M.U.L.O.-onderwijzer, die op één dag les heeft te geven in Alg. Geschiedenis, Engels, Algebra en Natuurkunde en ik geloof hem een grote dienst te doen, door hem bij de correctie de moeite te besparen van het uitrekenen van al die sommetjes; dat is voor hem niets dan lelijk tijdverlies, dat nergens goed voor is." P. W.

Dit was en is nog steeds de mening van den schrijver.

Hoe de pers de uitwerkingen ontving:

De schrijver weet wat een mensch toekomt en maakt, door van alle opg. met log. en van vele andere de volledige uitwerking te geven, de korreksie van een last bijna tot een lust.

Een opmerking aan de voet van blz. 73 is ons uit het hart gegrepen. Deze luidt: we willen hopen, dat de tijd niet ver meer af is, waarin men inziet, dat tafels, eens voor al berekend, de studerende tijd en moeite mogen besparen voor betere zaken.

Deze uitgaven is uitsluitend voor leraren.

F. B.

Een uitkomst voor onderwijzers en leeraren in de wiskunde. Vooral de uitgewerkte opgaven over logarithmen. Want het zelf nacijferen van die dingen is tijdverslindend.
B. C. *De School.*

Prachtige uitvinding, die antwoorden.
A. v. d. S. *Kath. Sch.bl.*

Geen gewone antw. Zo zijn b.v. alle vraagst. met log. uitgewerkt. Van sommige zijn 2 antw. gegeven, een met log., een met rentetafel.
Deze antw. maken de boekjes, waarbij ze behoren, nog aantrekkeliker.
F. B. *De Volkschool.*

HET GOEDKOOPSTE BOEK VOOR ALGEBRA.

WAAROM HET GOEDKOOPSTE?

Op een school zijn 45 boekjes I, 35 II A verkort, 15 II B; het aantal leerlingen voor deze boekjes is opv. 48, 30 en 17; 3 van I er bij, 5 van II A in de kast, 2 van II B er bij. Een volgend jaar op dezelfde manier; al staat deel I 10 jaar in de kast, het is nog bruikbaar; II A, de onverkorte en de verkorte en II B *verschillen enkel* in de examenopgaven, die er bij een volgende druk bijkomen; daar is geen ontkomen aan. Door de snelle opeenvolging van de drukken zijn de uitgaven II A, II A verkort en II B met de examenopgaven steeds bij.

Pres. ex. met het oog op invoering van II A, II A verkort en II B aan te vragen aan den uitgever of aan den schrijver.

● Bij invoering ontvangt de docent op aanvraag gratis en franco de antwoordenboekjes; in duplo; een voor school en een voor thuis.

Grotere oplagen volgen elkaar steeds sneller op.

Uitgaven van P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

P. WIJDENES

MEETKUNDE VOOR M.U.L.O.

deel I — 14de druk — gebonden, met gradenboog, driehoek en overzicht, 115 blz., 96 fig. . . . . *f* 1,40

deel II — 7de druk — gebonden, 157 blz., 96 fig. . . . . *f* 1,50

I. Inleiding. — Hoeken. — Richtingen. — Twee rechten gesneden door een derde. — Driehoeken. — De eerste drie gevallen van congruentie. — Eenvoudige eigenschappen van de driehoek. — Eerste constructies. — Vierde en vijfde geval van congruentie. — Vierhoeken. — Veelhoeken. — Oppervlakten, ook van de cirkel. — Herhaling.

Dit 1ste stukje is een afgerond geheel.

II. De cirkel. — Raaklijnen. — Meten van hoeken door cirkelbogen. — Meetk. pl. — Evenredigheid van lijnstukken. — Evenredige verandering van figuren. — Gelijkvormigheid. — Toepassingen daarvan. — Berekening van lijnstukken. — Opgaven mulo-A. — Constructies. — Cirkels bij driehoeken en vierhoeken. — Reg. veelhoeken. — Cirkel. — Overzicht. — Opgaven mulo-B. — Opgaven eindexamen 1ste h.b.s. 3-j. c. — Alg. herhaling.

Deze boekjes zijn een veilige gids voor het examen mulo. Bij deze boekjes behoort een boekje met

OPLOSSINGEN

van de vraagstukken uit Meetkunde voor mulo I en II, 3de dr. *f* 0,90
Uitsluitend voor docenten en voor hen gratis. Het bevat wenken, antwoorden, volledige oplossingen; voor het nazien een niet te onderschatten besparing aan tijd en last.

Pres. ex. met het oog op invoering te bevragen bij den uitgever of bij den schrijver (adres: Jac. Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid).

Vraagt tevens pres. ex. van het **NIEUW REKENBOEK** I, II en III.

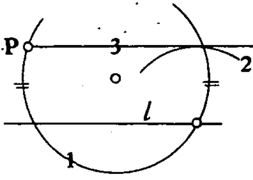


Fig. 1.

Door een punt P de lijn te trekken evenwijdig aan een lijn l; slechts twee cirkels.

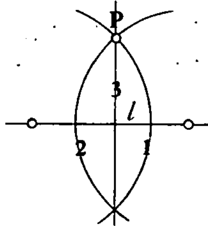


Fig. 2.

Door P de loodlijn op l neerlaten; twee cirkels.

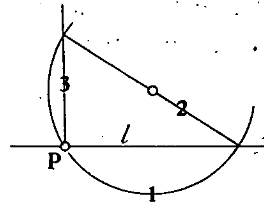


Fig. 3.

In het punt P van l de loodlijn oprichten; één cirkel en één rechte.

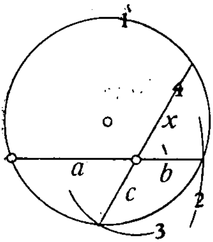


Fig. 4.

De vierde evenredige x construeren bij drie lijnstukken a, b en c; drie cirkels, in plaats van met evenwijdige lijnen.

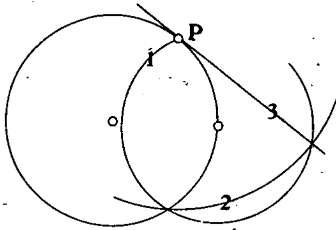


Fig. 5.

In een punt P van een cirkel de raaklijn te trekken; met twee cirkels.

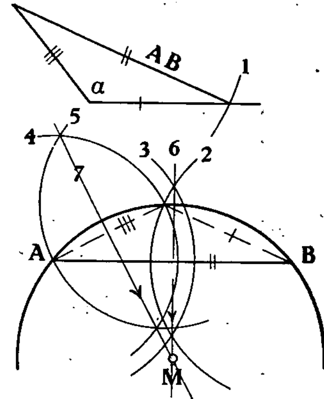


Fig. 6.

Het segment met gegeven koorde AB en gegeven hoek a.

het ogenblik van behandelen nog niet bekend mogen worden ondersteld.

Voor de volgende constructie geldt dit echter niet; gegeven een lijnstuk AB en een hoek $\alpha < 180°$; gevraagd het cirkelsegment te construeren met AB als koorde, dat de hoek α bevat.

Voor de in alle leerboeken aangegeven constructie zijn bij zuinig gebruik van cirkels nodig: 6 cirkels en 3 lijnen.

Een onbevooroordeeld leerling zal (naar mij gebleken is) eerder de constructie bedenken van fig. 6: construeer op AB een willekeurige driehoek met α als tophoek en hiervan de omgeschreven cirkel. Hiervoor zijn slechts nodig 5 cirkels en 2 lijnen.

Dr. J. Deknatel.

XXXVIII. NEGATIEVE WIJZERS LINKS VAN DE KOMMA. HET GEBRUIK VAN DE COLOGARITHME.

1. Negatieve wijzers worden vooraan gezet; in plaats van 0,23456 — 3 zet men $\overline{3}$,23456.

2. Aftrekken wordt omgezet in het optellen van het tegengestelde. Het tegengestelde van 2,41608 is — 2,41608 of 0,58392 — 3, dat we zo schrijven $\overline{3}$,58392.

Is de positieve wijzer 2, dan wordt de negatieve bij het omzetten in een aftrekking $\overline{3}$, terwijl de mantisse het arithmetisch complement wordt, dat is hier dus 1 — 0,41608 = 0,58392; dit complement kunnen we aangeven met colog, dat men trouwens reeds dikwijls ontmoet; de verkorting col is echter nog beter, (uit te spreken als col of colog).

De som van de wijzers van een logarithme en van zijn cologarithme is — 1 of $\overline{1}$.

3. Bij het maken van vraagstukken wordt de wijzer van de col echter niet volgens enige regel uit de log afgeleid, maar direct neergeschreven.

Het getal 48,25 heeft 2 cijfers links van de komma;
zijn col is $\overline{2}$,31650
Het getal 9,602 heeft 1 cijfer links van de komma;
zijn col is $\overline{1}$,01764
Het getal 0,4788 heeft geen cijfer links van de komma;
zijn col is 0,31985
Het getal 0,029 heeft 1 nul rechts van de komma;
zijn col is 1,53760
Het getal 0,003633 heeft 2 nullen rechts van de komma;
zijn col is 2,43973

Beschouwt men de komma in het getal als een punt O op de x-as, dan zien we:

a cijfers *links* in het getal geeft in de col $\bar{a}$ . . . . (a min),

b nullen *rechts* in het getal geeft in de col b, . . .
geheel in overeenstemming met de tekens op de x-as, links min, rechts plus.

4. Voorbeelden:

$x = \frac{7,462}{3,813}$

$\log 7,462 = 0,87286$
$\text{col } 3,813 = \bar{1},41873$
$+$ ——— → de mantisse bij 3813 is 58127; bij de c 1 dus 41893 / 1,00000
$\log x = 0,29159$

$y = \frac{7,462}{38130}$

$\log 7,462 = 0,87286$
$\text{col } 38130 = \bar{5},41873$
$+$ ———
$\log y = 4,29159$

$z = \frac{0,07462}{0,003183}$

$\log 0,07462 = \bar{2},87286$
$\text{col } 0,003813 = 2,41873$
$+$ ———
$\log z = 1,29159$

4. $x = \sqrt[3]{0,0003}$. Op de bekende manier:

$\log 0,0003 = \overset{2}{\not{0}},47712 = \overset{6}{\not{4}}$
——— : 3
$0,82571 - 2$

Op de nieuwe manier: $\log 0,0003 = \bar{4},47712$
——— : 3
$\bar{2},82571$

5. $x = \frac{31}{19\sqrt[4]{0,113}}$

$\log 0,113 = \bar{1},07664$
——— : 4
$\bar{1},76916$

$\text{col } \sqrt[4]{0,113} = 0,23084$
$\text{col } 19 = \bar{2},72125$
$\log 31 = 1,49136$
$+$ ———
$\log x = 1,44345$

In de uitwerkingen van de logarithmenvraagstukken uit Algebraische Vraagstukken II ziet men meer voorbeelden; even wennen en men werkt er even gemakkelijk mee als met de negatieve wijzers achteraan. Het voornaamste is echter, dat een aftrekking wordt omgezet in een optelling, hetgeen geheel in de lijn van de algebra ligt. Door het steeds toenemend gebruik in de practijk van reken-

machines moet men zo mogelijk enkel optellen en niet meer aftrekken.

De manier, hier gevolgd, wordt algemeen gebruikt in Frankrijk en België, terwijl men die ook reeds vindt in Engelse schoolboeken. In mijn leerboeken is deze manier nog niet gevolgd; wel in genoemde uitwerkingen, waardoor de leraar zich, zo hij wil, wat kan wennen aan de veranderde schrijfwijze en aan de omzetting van een aftrekking in een optelling.

W.

XXXIX. „LETTERKUNDE VERSUS WISKUNDE".

De Nieuwe Rotterdamsche Courant heeft enkele maanden geleden plaatsruimte afgestaan voor een polemiek onder bovenstaande titel. Heel diep ging die strijd niet en de Redactie van „Euclides" heeft er dan ook terecht het zwijgen toe gedaan. Er zou voor mij (vooral na het artikel van Dr. E. J. Dijksterhuis in het December-nummer van „De Gids") geen aanleiding bestaan, op deze controverse terug te komen, wanneer niet toevallig enkele regels druks onder mijn oog waren gekomen, die een allerzonderlingst licht werpen op de waarde van de door de tegenstanders van de wiskunde aangevoerde argumenten.

Men moet weten, dat het paradestuk van hun arsenaal bleek te bestaan in een brief, waarin de achttienjarige Macaulay uiting gaf aan zijn afkeer voor de wiskunde. Ik vind nu in mijn exemplaar van zijn „History of England" (A new Edition in two Volumes, Lond. 1877) zijn levensbeschrijving van de hand van H. H. Milman, waaraan ik de volgende passage ontleen:

„His career at Cambridge was not quite so brilliant as the sanguine expectations of his friends had foretold. He had a repugnance for mathematics, *or rather he was under the jealous and absorbing spell of more congenial studies. That repugnance in after life was a subject of much regret; he fully recognised the importance, almost the necessity, of such studies for perfect education.*"

Cursivering van mij; commentaar is, dunkt me, overbodig!

E. W. BETH.

BOEKBESPREKINGEN.

Dr. H. Turkstra, Het veelomstreden vraagstuk van het wiskundeonderwijs op de middelbare school (uitgave van de Nederlandsche Vereeniging voor Geestelijke Volksgezondheid).

Enkele jaren geleden besprak ik een geschrift van denzelfden schrijver onder den titel: „Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School". We vinden in de nieuwe publicatie een aantal van de hierin (zelfs uitvoeriger) behandelde vraagstukken terug, maar ook andere punten.

Er is in wat Turkstra schrijft veel, dat aangenaam treft. Vooreerst geeft hij voortdurend blijk van groote kennis van zaken, verkregen door nauwgezette bestudeering van wat op het gebied van het wiskundeonderwijs gedacht en geschreven is, en de toetsing daarvan aan de resultaten van eigen onderwijs-ervaring. In de tweede plaats is hij objectief voor zoover dit mogelijk is: hij verdonkeremaant nooit de meeningen van andersdenkenden. In de derde plaats is wat hij schrijft rustig en zonder de overdrijving, die zoo vaak paedagogische geschriften ontsiert.

Hij zal schrijven over „de moeilijkheden, die het wiskunde-onderwijs op de middelbare school veelal oplevert", maar begint op blz. 6 met er op aan te dringen deze moeilijkheden niet te vergrooten en ze niet te suggereeren waar ze niet zijn. Dit doet al dadelijk sympathiek aan, maar hij had veel verder kunnen gaan. Men merkt op, dat het wiskundeonderwijs niet aan allen geeft, wat men er van gehoopt heeft. Is er niet veel meer reden zich erover te verbazen, dat er nog zoo velen zijn, die wèl van dit onderwijs profiteeren? Wanneer men let op de grootte van de verschillen in intellect en andere eigenschappen van de leerlingen, die men in één klasse vereenigt, dan moet men m.i. naar een verklaring zoeken van het feit, dat er in den regel nog iets van terecht komt, en dat de docent in staat is aan zóózeer verschillende kinderen met dezelfde woorden leiding te geven. De verklaring moet wellicht ten deele hierin gezocht worden, dat dit laatste inderdaad niet het geval is; een aantal leerlingen leert meer van de vragen en de domme antwoorden van de mede-leerlingen dan van de verstandige woorden van den docent.

Ik moest hieraan denken toen ik las, wat Turkstra vertelt van de onderzoekingen omtrent het denkproces van kinderen. „Een leerling van Selz laat niet den leeraar, doch den leerling in de luisterende klas vertellen, hoe hij tot de oplossing van iets gekomen is, met het gevolg, dat van de klassegenooten, die zelf niet de juiste methode gevonden hebben, de prestaties met sprongen omhoog gaan." Men moet uit deze mededeeling afleiden, dat deze onderwijsmethode voor Selz nieuw

was, en dat hij dus van den leeraar en den gewonen gang van het onderwijs een voorstelling had, die, in elk geval ten onzent, ook als karikatuur nauwelijks kan worden aanvaard.

In het algemeen kan ik op grond van ervaring zeggen, dat de wiskunde-leeraren zeker niet half zoo slecht zijn als de paedagogen schijnen te meenen. Het heeft me verwonderd en teleurgesteld, dat Turkstra dat niet duidelijk heeft laten uitkomen. Ik had een woord van protest verwacht tegen de opmerking van den voorzitter Prof. Kohnstamm, dat „het heden te bespreken vraagstuk tot nu toe al te uitsluitend bekeken is uit het oogpunt van de leerstof". Het schijnt echter wel, dat Turkstra het hierin met hem eens is, en dat hij meent, dat hij een nieuwe gedachte uitspreekt, als hij zegt, dat niet alleen aan de leerstof, maar ook aan den leerling en aan den leeraar gedacht moet worden. Dat hij hier op een dwaalspoor was, moet hij toch wel gevoeld hebben, toen hij schreef (blz. 16): „Deze drie zijn trouwens nimmer van elkaar te scheiden". Er bestaat geen aanleiding voor de meening, dat de didactici van een vroegere generatie bij het ontwerpen van een leerplan en het bedenken van een onderwijsmethode niet met groote zorg zouden hebben overwogen, voor welke leerlingen het leerplan en de methode bestemd waren. Ook zij kunnen zich vergist hebben; in zulke gevallen mag men echter niet nalaten te bedenken, hoeveel gemakkelijker de kritiek is dan de kunst.

In zijn inleidend woord sprak de voorzitter nog over „de mathematisch goed aangelegden". Het doet me veel genoegen, dat Turkstra zich nog eens duidelijk uitgesproken heeft over de openbare meening van den specifieken wiskundigen aanleg. Het is merkwaardig, dat bij ons sommige vormen van bijgeloof zulk een taai bestaan voeren. Goed gezien was het, het resultaat van een der bekende onderzoekingen op dit punt op te nemen, waar men sub *c* leest: „eenzijdige begaafdheid is uitzondering". Feitelijk had er moeten staan: „eenzijdige goede prestaties zijn uitzondering", wat nog heel wat anders is, aangezien het in een aantal der waargenomen gevallen zeker mogelijk zal zijn de eenzijdige goede prestaties op meer bevredigende wijze te verklaren dan door de hypothese van de eenzijdige begaafdheid.

In deze publicatie is verder een verslag opgenomen van de discussie, waartoe de uiteenzetting van Turkstra aanleiding gegeven heeft. Ook deze is op verschillende punten zeer belangwekkend. Ik deel alleen mee, dat A. Groeneveld ervoor waarschuwde, zich niet te laten verstrikken in bepaalde dogmatisch-psychologische opvattingen. Zoo b.v. ten aanzien van het dogma der „puberteit". Het was hem opgevallen, dat vele psychologen allerlei psychische zoogenaamde puberteitsverschijnselen eenvoudig van elkaar overschrijven. Daarentegen ontmoet degene, die systematische, psychologische exploraties bij het individu toepast, zelden de psychische realiteit der zoogenaamde puberteit. Wel bestaat er natuurlijk een puberteit in anatomischen zin. Vermoedelijk houdt zijn waarschuwing troost in voor de docenten, die in de onderwijspractijk vergeefs gezocht hebben naar gevallen van algeheele en sprongsgewijze verandering der leerlingen, die volgens de officiëele opvatting eer regel dan uitzondering is.

Ik beveel de lezing van deze publicatie aan de collega's warm aan. Hoewel niet ieder het overal met den schrijver eens zal zijn, geloof ik niet, dat iemand haar onvoldaan ter zijde zal leggen.

H. J. E. Beth.

Opmerking over soorten van oneindigheid van figuren, naar aanleiding van de bespreking door den heer J. C. H. GERRETSEN van mijn Leerboek der nieuwere meetkunde van het vlak en van de ruimte (Euclides 15e Jaarg. 1938, Nr. 3, blz. 148—152).

Ik ben den heer G. dankbaar voor de groote aandacht, die hij aan mijn boek heeft besteed. Een enkele opmerking over zijn boekbespreking zij mij vergund.

Op blz. 152 zegt de heer G. naar aanleiding van de begrippen ∞^k figuren en veelvoudigheid van gegevens: „Goed beschouwd kunnen deze problemen alleen maar behandeld worden met vrij diep gaande algebraïsche hulpmiddelen." Ik ben het hiermede geheel eens. Bij het schrijven der 3 hoofdstukken van afdeeling C „Gegevens, die een figuur bepalen" (XVII Soorten van oneindigheid van figuren, XVIII Intrinsieke coördinaten van een figuur, XIX Veelvoudigheid van gegevens of voorwaarden) was ik mij volkomen bewust, dat deze hoofdstukken niet op strengheid aanspraak kunnen maken.

Op blz. 151 maakt de heer G. aanmerking op de wijze, waarop ik in § 70 tot de uitspraak gekomen ben, dat het *aantal* coördinaten niet afhangt van de keus van het coördinatenstelsel. Ik vestig er echter de aandacht op, dat ik na de gegeven redeneering zeg: „We wijzen er op, dat de voorgaande redeneering, in de algemeenheid, waarin ze is voorgedragen, niet streng is. In eenvoudige gevallen, b.v. in dat van lineaire vergelijkingen, is de redeneering echter wel afdoende. We kunnen hier echter op de zaak niet dieper ingaan, waarom we maar met de gegeven redeneering volstaan." Hier is natuurlijk „niet streng" op te vatten als „niet juist". Terecht zegt de heer G., dat ook de stelling zelf niet juist is, als niets gezegd wordt omtrent den samenhang der coördinaten van beide stelsels, maar een geheel juiste en eenigszins volledige formuleering der stelling zou mij veel te ver gevoerd hebben.

De 3 hoofdstukken van afdeeling C beslaan (van de vraagstukken afgezien) te zamen slechts 17 bladzijden, waarvan nog de meeste aan toelichtende voorbeelden besteed zijn, en daarin kunnen de aangeroerde onderwerpen onmogelijk met de noodige strengheid behandeld worden. Zooals reeds gezegd, lag in die hoofdstukken een strenge behandeling ook geenszins in mijn bedoeling. Zoo zeg ik in § 92: „Heeft men de veelvoudigheden der gegevens opgeteld en voor de som daarvan k gevonden, dan kan men verwachten, dat de figuur door de gegevens bepaald is (al of niet ondubbelzinnig). Zekerheid hieromtrent heeft men echter niet, als geen onderzoek naar de onafhankelijkheid der gegevens is ingesteld. Het tellen der gegevens, een p-voudig gegeven voor p gegevens tellend, is dus slechts als een voorloopige oriënteering te beschouwen." Met afdeeling C heb ik geen andere

bedoeling gehad dan een voorloopige oriënteering en in de andere hoofdstukken heb ik mij dan ook nergens bij een of ander bewijs op een stelling uit afdeeling C beroepen.

Nu kan men op grond daarvan met den heer G. van meening zijn, dat men dan beter doet de terminologie van de oneindigheid van stelsels van figuren en van de veelvoudigheid van gegevens geheel weg te laten. Het wil mij echter voorkomen, dat een voorloopige oriënteering, als door mij bedoeld, waarde kan hebben en ik kan mij niet goed voorstellen tot welke denkfouten beginners daardoor kunnen worden gebracht (zooals de heer G. vreest), als zij op de door mij in het boek gegeven waarschuwingen acht slaan. Ik acht het b.v. wel van waarde, als iemand kan nagaan, of hij in een bepaald geval verwachten kan over een voldoend aantal gegevens te beschikken om een vlakken n-hoek te kunnen construeeren, en er zich rekenschap van kan geven, waaraan het ligt, als deze verwachting eens niet bewaarheid wordt. Ik stond voor de moeilijke keus deze dingen weg te laten of er met eenigszins vage beschouwingen iets van mede te deelen.

Ik kan niet nalaten te zeggen, dat het mij genoegen gedaan heeft, dat de heer G. blijkbaar tegen geen andere redeneeringen bedenkingen heeft dan tegen die, welke ik zelf reeds in mijn boek als minder streng heb aangewezen.

Fred. Schuh.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATS-COMMISSIE 1938 [1]).

De subcommissie voor de *wiskunde* moet tot haar teleurstelling vaststellen, dat de examenresultaten der A-candidaten, vergeleken met die van 1937, achteruitgang toonen, al zijn zij iets beter dan die van 1936. De gemiddelde cijfers voor stel- en meetkunde zijn thans 5,16 en 5,04. In 1937 waren de overeenkomstige gemiddelden 5,44 en 5,34 en in 1936 5,08 en 4,98.

De achteruitgang der examenresultaten van de A-candidaten tegenover 1937 blijkt ook hieruit, dat 42 van de 204 candidaten voor de stelkunde en 41 van de 198 voor de meetkunde een cijfer lager dan 4 kregen. In 1937 was dit bij de stelkunde het geval met 31 van de 218 en bij de meetkunde met 32 van de 212.

De hoopgevende verbetering, die in 1937 ten aanzien van het aantal nauwelijks examineerbare A-candidaten viel waar te nemen, is dus helaas weer verdwenen. Ten aanzien van die A-candidaten, die over zooveel kennis en inzicht toonden te beschikken, dat zij examineerbaar waren, valt op te merken, dat zij weliswaar in het algemeen moeite gedaan hadden om zich stellingen met de bijbehoorende bewijzen en oplossingsmethoden eigen te maken, maar dat zij daarin in menig geval slechts zeer ten deele geslaagd waren.

Zoo eischte de bepaling van het teeken van functies als

$$x^2 - 3x + 2; \frac{x^2 - 1}{x + 2}; \quad \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 9}; \quad \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$$

al te dikwijls de tusschenkomst van den examinator. Bij de bepaling van de uiterste waarden van functies als de bovenstaande bleek herhaaldelijk wel de kennis van de methode aanwezig te zijn, maar niet het begrip daarvan. Ook de bepaling van de waarden van a, voor welke een functie als $ax^2 - ax + (a-2)$ voor alle reëele

---

[1]) Bijvoegsel tot de Nederlandsche Staatscourant van 20 en 21 Jan. 1939 no. 15. — Wij herhalen hier, wat reeds meerdere keren werd gezegd: Een zeer belangrijk verslag met nuttige wenken en raadgevingen; volstrekt onmisbaar voor opleiders. Red.

waarden van x hetzelfde teeken behoudt, bleek voor sommige candidaten een onoverkomelijke moeilijkheid te zijn.

De examens der A-candidaten in planimetrie en stereometrie hebben de subcommissie in zooverre reden tot voldoening gegeven, dat begrip- en stelselloos manoeuvreeren met allerlei stellingen en formules niet zoo veelvuldig voorkwam als vroeger. Dat het voldoen aan de exameneischen voor planimetrie en stereometrie zeer wel mogelijk is door zich te beperken tot de toepassing van de fundamenteele stellingen en definities, heeft toch meer en meer ingang gevonden. Zoo werd bij het berekenen van lijnstukken toch eindelijk meer vertrouwen gesteld in de hulp, die daarbij de stelling van Pythagoras, de gelijkvormigheid van driehoeken en de toepassing der stelkunde kunnen bieden. Bij stereometrische vraagstukken, waarbij het bewijs noodig is, dat 2 lijnen loodrecht op elkaar staan, werd gelukkig meermalen, zonder dat de examinator een of anderen wenk in die richting geven moest, bewust naar een vlak gezocht door de éene lijn en loodrecht op de andere. Kwam de afstand of de hoek tusschen twee kruisende lijnen ter sprake, dan bleek menige A-candidaat, uitgaande van de desbetreffende definities, zonder ingrijpen van den examinator tot een antwoord te kunnen komen.

Bij het construeeren op ware grootte van lijnstukken en hoeken bleken echter vele candidaten niet voldoende doordrongen te zijn van het besef, dat daartoe driehoeken moeten worden opgezocht, waarin die lijnstukken of hoeken als elementen voorkomen en die zóó gekozen zijn, dat daarvan op grond van de gegevens drie onafhankelijke elementen bekend zijn. Ook het teekenen van doorsnedefiguren verliep in menig geval op onbevredigende wijze, meestal doordat men er niet aan dacht, dat het snijpunt van een gegeven lijn met een gegeven vlak bepaald kan worden door middel van de snijlijn van een geschikt gekozen vlak door de gegeven lijn met het gegeven vlak. Bij vraagstukken over de verhouding, waarin een door drie gegevens bepaald doorsnedevlak, b.v. een der ribben of een der lichaamsdiagonalen van een parallelepipedum verdeelt, moest zelfs herinnerd worden aan het toepassen van evenredigheden, die het gevolg zijn van de gelijkvormigheid van driehoeken. Bij ruimteconstructies dachten velen niet aan de meetkundige plaatsen, die men verkrijgt door nu eens met een deel, dan weer met een ander deel der gegevens rekening te houden.

Wat de B-candidaten betreft, zijn de gemiddelde cijfers voor

stel- en meetkunde ongeveer gelijk aan die van 1937, nl. 5,07 en 5,46 tegen 5,15 en 5,5 in 1937. Voor trigonometrie en analytische meetkunde is het gemiddelde cijfer 5,03, terwijl het in 1937 5,6 was.

Voor stelkunde, meetkunde, trigonometrie en analytische meetkunde kregen respectievelijk 11 van 43 candidaten, 4 van 35 en 7 van 41 een cijfer lager dan 4, waarbij opgemerkt moet worden, dat achtmaal een cijfer lager dan 3 moest worden toegekend. Hoewel bij de B-candidaten het aantal flagrante gevallen van onkunde en onvermogen relatief en absoluut, vergeleken met 1936, belangrijk verminderd is en zelfs voor de meetkunde, trigonometrie en analytische meetkunde gunstiger is dan dat van 1937, moet de subcommissie er toch op wijzen, dat slechts 14 van de 41 candidaten voor de trigonometrie en analytische meetkunde het cijfer 6 of meer hebben kunnen behalen. Bij de examens in stelkunde en meetkunde hebben de B-candidaten een beter figuur kunnen maken. Daarbij kregen respectievelijk 20 van de 43 en 17 van de 35 een 6 of hooger.

De mondelinge examens der B-candidaten hadden in het algemeen een weinig bevredigend verloop. Bij het mondeling examen komt het vooral aan op inzicht en op een op grondige kennis berustende orienteering in de verschillende onderdeelen der wiskunde, niet op het ten toon spreiden van routine en het naar voren brengen van speciale formules en stellingen. Vergeleken met de mondelinge examina der A-candidaten, zijn die der B-candidaten zeker niet beter, als men afziet van hetgeen zij ten gevolge van meer routine praesteeren. Niet alleen het schriftelijk, maar ook het mondeling examen in de wiskunde eischt ernstige voorbereiding. Deze voorbereiding mag niet ontaarden in het aankweeken van begriplooze routine en in het uit het hoofd leeren van allerlei speciale formules en stellingen, waarvan de bewijzen er bij het mondeling examen bovendien dan nog heel slecht afkomen. De subcommissie ziet veel liever, dat men zich in dit opzicht een moedige beperking oplegt en dat men de door haar gestelde vragen beantwoordt door het met begrip toepassen van fundamenteele stellingen, formules en definities. Een dergelijke houding wekt vertrouwen in de soliditeit der voorbereiding.

De subcommissie voor de *natuurkunde* kan evenmin als haar voorgangster tevreden zijn over de resultaten van het examen in

dit onderdeel. Afgezien van enkele goede examens, moest zij opmerken, dat vele candidaten zich onvoldoende voorbereid voor het examen hadden aangemeld. In het bijzonder trof het haar, dat verschillende candidaten slecht vertrouwd waren met eenvoudige energetische beschouwingen. Op vragen als: hoeveel chemische energie wordt in een stroomgevende batterij per seconde omgezet in electrische energie?, welke energie-omzettingen hebben er in een centrale plaats om ons van electrisch licht te voorzien?, wat is warmte eigenlijk?, waarom is dus het zg. nuttig effect van stoommachines en Diesel-motoren zoo gering?, waarvoor dient de toegevoerde warmte, als we één liter verkoken?, welke energie-omzettingen hebben plaats in een electrischen trillingskring?, hoe met behulp van de wet van arbeidsvermogen de E.M.K. van inductie te bepalen?, onder welk voorbehoud geldt de wet van Ohm in zijn naïeven vorm?, hoe de energie te bepalen, die een dynamo levert?, enz., enz. bleven verschillende candidaten het antwoord ten eenenmale schuldig. Aan toekomstige examinandi dient te worden aangeraden, het mechanisch warmte-aequivalent toch ook vooral in zijn oorspronkelijken vorm 1 calorie $\equiv$ 427 K.G.M. te kennen, daar deze formuleering beter tot de verbeelding spreekt dan de daaruit afgeleide; evenzoo verdient het aanbeveling, zich, waar noodig af te vragen, van welke dimensie de verschillende grootheden zijn, wijl hierdoor het inzicht in hooge mate wordt verdiept. Verder behooren vele candidaten meer belangstelling te bezitten voor allerlei practische vragen inzake toepassingen van de natuurkunde, als: welk is het beginsel van een microscoop?, van een astronomischen kijker?, welk oog heeft een bril noodig van twee dioptrieën?, hoe bepaalt men bij voorkeur brekingsindices?, hoe golflengten van licht?, hoe kan een achromatisch lenzenstelsel worden verkregen?, hoe wordt een stopcontact aan een electrisch net aangebracht?, wat is een halfwatt-lamp?, wat een dekalumen?, waarom gebruikt men gaarne wisselstroom?, hoe kan men dezen gelijkrichten?, hoe kunnen accumulatoren dus geladen worden?, op welk beginsel berust een electromotor?, op welk beginsel een moderne koelinrichting veelal?, welk is het diagram van een Dieselmotor?, hoe verkrijgt men vloeibare lucht?, enz. enz.; zoodoende kan men immers een omvangrijk deel van de leerstof als het ware spelenderwijs tot zijn eigendom maken. De subcommissie acht het waarschijnlijk, dat hierdoor de meer zuiver theore-

tische quaesties, als de beteekenis van de tangentenboussole en van den absoluten electrometer van Thompson, het verband tusschen de electromagnetische en de electrostatische eenheden, de onderzoekingen van Andrews met CO_2, de gastheoretische beschouwingen van Clausius, de theorie van Huygens, Fresnel, enz., beter tot hun recht zouden komen. Zij geeft verder aan toekomstige candidaten in overweging, ook vorige verslagen nog eens ter hand te nemen, wijl de opmerkingen daarin vermeld, zooals haar dit jaar ten duidelijkste is gebleken, nog geheel van kracht zijn.

GETALBEGRIP EN TIJDSAANSCHOUWING

DOOR

EVERT BETH.

Het onderstaande is de vrijwel onveranderde afdruk van een bekroond antwoord op de volgende, door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam voor het jaar 1937 uitgeschreven prijsvraag:

„Gevraagd wordt een psychologische analyse van het subjectieve tijdsbegrip als grondslag van den wiskundigen denkvorm en met name een onderzoek naar het zuiver intuitief dan wel gedeeltelijk empirisch karakter van de daarbij te onderscheiden momenten of stadia, als daar zijn: de onderscheidbaarheid en de herkenbaarheid van psychische elementen en van relaties tussen die elementen, de rangschikking dier elementen in eindige, bepaalde of onbepaalde reeksen en de samenvoeging dier reeksen door interen extrapolatie tot één geheel."

Door verschillende omstandigheden moest een bewerking, waarbij o.a. rekening zou zijn gehouden met het over de inzending uitgebracht Rapport, achterwege blijven. Ik hoop echter in een volgende publicatie op een aantal der hier behandelde problemen terug te komen.

INLEIDING.

Niets lijkt natuurlijker, dan, zooals Kant heeft gedaan, het getalbegrip in verband te brengen met de aanschouwing van den tijd. Immers, het getal leeft voor ons als resultaat van telling of rangschikking en elke telling of rangschikking geschiedt in den tijd, vooronderstelt dus onvermijdelijk het bewust doorleven van de temporele opeenvolging in haar onderscheidene stadia. Het getal, in het bijzonder het natuurlijk getal, om het even, of men het opvat als cardinaal-, dan wel als ordinaalgetal, schijnt dus van nature in een wel zeer nauwe betrekking te staan tot de tijdsaanschouwing.

Tegen dezen gedachtengang kan men echter gewichtige bezwaren inbrengen. Wordt inderdaad de evidentie van de betrekking

tusschen getalbegrip en tijdsaanschouwing algemeen toegegeven? Er zijn verschillende feiten, die er op schijnen te wijzen, dat dit niet het geval is.

Ten eerste wijs ik op de, vrij talrijke, recente en minder recente, pogingen, de leer der getallen „zuiver logisch" en derhalve ook onafhankelijk van elk beroep op de tijdsaanschouwing op te bouwen. Of die pogingen geslaagd mogen heeten, of niet, is niet van invloed op de bewijskracht van het argument; immers, hun bestaan alleen bewijst reeds afdoende, dat de gedachtengang van Kant niet zoo voor de hand liggend en stringent is, als wel zou kunnen lijken.

Men zou echter kunnen tegenwerpen, dat de hierboven bedoelde onderzoekingen geen uitvloeisel zijn van een oppositie van de natuurlijke getalbeleving tegen de opvattingen van Kant, maar veeleer moeten worden gezien in verband met de oppositie tegen het kritisch systeem in het algemeen.

Daarom wil ik wijzen op de merkwaardige omstandigheid, dat de oudste philosophische school, die zich heeft beziggehouden met de vraag naar het wezen van het getal, de school van Pythagoras, geen verband heeft gelegd tusschen tijd en getal, maar het getal heeft opgevat als een ruimtelijke structuur. Het is weliswaar onzeker, of de aanhangers van Pythagoras zich de getallen (analoog aan de ideeën van Plato) onafhankelijk van de stof hebben gedacht en dus de stoffelijke dingen beschouwd hebben als beelden van de getallen; dan wel, de getallen hebben geïdentificeerd met de dingen zelf. Maar dit alles is voor ons thans zonder eenig belang. [1])

Uit het bovenstaande wil ik alleen concluderen, dat het niet zoo evident is, als het wel schijnt, dat de tijdsaanschouwing den grondslag uitmaakt van het getalbegrip en daarmee tevens voor den wiskundigen denkvorm (zijn er andere?) in het algemeen. Het is daarom mijn bedoeling, ook de betrekking tusschen tijd en getal aan een onderzoek te onderwerpen. Maar vóór alles is noodig een psychologische analyse van de subjectieve tijdsaanschouwing.

DE SUBJECTIEVE TIJDSAANSCHOUWING.

Ik meen deze studie niet beter te kunnen beginnen, dan met een voorlopige beschrijving van onze subjectieve tijdsaanschouwing.

Deze beschrijving moet worden gerekend tot de zg. phaenomenologie of beschrijvende psychologie (al willen de rasechte „phaenomenologen" er niet van hooren, dat deze wetenschap als onderdeel van de psychologie zou worden beschouwd!); de phaenomenologie bepaalt zich tot het introspectief beschrijven van de psychische phaenomenen, zonder te trachten, deze phaenomenen langs psychologischen, genetischen of anderen weg te verklaren. Zij ziet met name geheel af van de onderscheiding van een empirisch en een apriorisch element in onze bewustzijnsinhouden.

Voor het geven van een dergelijke beschrijving meen ik waardevolle aanknopingspunten te vinden in bepaalde gedeelten van Kant's „Kritik der reinen Vernunft" (A 98/103); deze gedeelten, die ik reken tot het mooiste, dat Kant ooit geschreven heeft, kunnen geheel los van het systeem der kritische philosophie worden gewaardeerd en ze bezitten, los van dit systeem, blijvende waarde. Ik wil daarom grotendeels afzien van het systematisch en historisch verband en ik meen daartoe te eerder het recht te bezitten, omdat mijn taak niet ligt op het gebied van de systematische philosophie of van de geschiedenis der wijsbegeerte. Trouwens, ik ben overtuigd, dat men, wanneer men met betrekking tot Kant's systeem schrijft: „man kann nicht *Lehrstücke eines Systems* in Vergleich setzen mit den *Denkforderungen* einer immerfort sich erweiternden Wissenschaft" (Gent, zie noot), de wetenschappelijke pretenties van Kant's wijsbegeerte volkomen voorbijziet. Kant immers wil meer en beter, dan een sluitend begripssysteem opbouwen: hij wil zijn kriticisme aan het „Faktum der Wissenschaft" getoetst zien.

De hier in samenhang weer te geven passages uit de „Kritik" gaan uit van de opmerking, dat al onze voorstellingen, onverschillig, wat hun aard of oorsprong moge zijn, tot den inwendigen zin behoren, en dat ze, in die hoedanigheid, onderworpen zijn aan den tijd, als vorm van den inwendigen zin, waarin ze worden geordend en verenigd en in onderlinge betrekking gebracht.

Iedere aanschouwing omvat een veelheid van indrukken, die echter nimmer als zodanig tot bewustzijn zou kunnen komen, wanneer onze geest niet in staat was, de *volgorde* van die indrukken te onderscheiden. De indrukken van één enkel oogenblik immers vormen voor de voorstelling een volstrekte eenheid. Zal evenwel de veelheid van indrukken, die ontstaat door de onder-

scheiding in den tijd, in de *aanschouwing* tot een veeleenheid kunnen samenvloeien, dan is het noodig, dat de geest deze veelheid van indrukken doorloopt en samenvat. Deze samenvattende functie van den geest duidt Kant aan als *synthese der apprehensie.*

Intussen is deze synthese der apprehensie op zichzelf nog lang geen voldoende grondslag voor het tot stand komen van onze kennis. Opdat kennis zal kunnen ontstaan is het noodig, dat vroegere indrukken onder invloed van de tegenwoordige opnieuw bewust worden (hoe dat in zijn werk gaat, laat Kant buiten beschouwing, omdat hij geen beroep wil doen op de uitsluitend langs empirischen weg vaststelbare wetten van de associatie van voorstellingen). Zoo wordt onze geest in staat gesteld, onze vroegere indrukken met de tegenwoordige tot een hogere eenheid, die van de *verbeelding,* samen te vatten. Deze samenvattende functie van onzen geest duidt Kant aan als *synthese der reproductie.* Ze is met de synthese der apprehensie onafscheidelijk verbonden.

De beide besproken synthetische functies van onzen geest zouden nog volkomen waardeloos zijn zonder de *synthese der recognitie.* Immers, het is niet voldoende, dat onze geest onder bepaalde omstandigheden vroegere indrukken reproduceert; tevens is nodig, dat de gereproduceerde indrukken worden *herkend* als reeds eerder in het bewustzijn opgenomen te zijn geweest. De synthese der recognitie nu verenigt de geapprehendeerde indrukken met de gereproduceerde in de eenheid van het *begrip.*

De hier weergegeven beschouwingen van Kant geven eigenlijk eerst inhoud aan de in de transcendentale aesthetica neergelegde theorie van den tijd als vorm van den inwendigen zin, in zoverre eerst hier de onderscheidene momenten aan de synthetiserende functie van de tijdsaanschouwing nader worden omschreven.

De door Kant genoemde synthetische functies van den geest onttrekken zich aan de introspectie, ze zijn aan het bewustzijn niet „onmiddellijk gegeven" — en ze kunnen dat niet zijn. Immers, zouden wij de verwerking van onze indrukken tot een (veel-)eenheid gewáár worden, dan zouden die indrukken ons reeds welonderscheiden en toch in zekeren samenhang met elkaar voor den geest moeten staan; dit zou echter klaarblijkelijk reeds een voorafgaande samenvatting van die indrukken tot een veeleenheid vooronderstellen!

Men kan tot het „bestaan" van de synthetische functies der apprehensie, der reproductie en der recognitie dan ook slechts langs den omweg over hun resultaat besluiten.

Ten eerste: dat de geest een dergelijke synthese tot stand moet brengen, is af te leiden uit de (empirisch vaststelbare) omstandigheid, dat het bewustzijn afhankelijk is van prikkels „van buiten". Verdwijnen die prikkels, dan houdt het bewustzijn op; ik denk in dit verband aan waarnemingen van Ozorio de Almeida en Piéron bij dieren, van Boris Sidis bij jonge kinderen, van Strümpell, Féron en anderen bij volwassen menschen; bij gevoelloosheid van de huid veroorzaakt het sluiten van ogen en oren het intreden van een slaaptoestand.

Verder kunnen wij (en deze omstandigheid is gelukkig wèl voor introspectie toegankelijk) de door onzen geest tot stand gebrachte synthese (ik laat nu terzijde de vraag: geheel of ten dele?) te niet doen (*analyse*). Ik ben overtuigd, dat er alle aanleiding is, deze analytische functie van het bewustzijn te beschouwen als een der meest wezenlijke kenmerken van het menselijk intellect. Dit vindt nadere bevestiging in zekere, beroemde, resultaten van de moderne „dierpsychologie" (Krüger, Volkelt, e.a.). Naar het schijnt, beschikt de dierlijke psyche, evenals de menselijke, over bepaalde synthetische functies (d.w.z., de gedragingen van het dier laten zich, naar analogie van die van den mens, als uitdrukking van dergelijke functies „verstaan"; de beroemde vraag naar het „bestaan" van een dierlijke psyche lijkt mij een schijnprobleem te vertegenwoordigen, omdat de indicatieve inhoud eraan ontbreekt; een „experimentum crucis" is principieel uitgesloten, omdat *redelijke verstandhouding* met dieren onmogelijk is). De uitoefening van deze synthetische functies (de „autochthone synthesekrachten" van Köhler) is bij mensch en dier gebonden aan bepaalde schema's, volgens welke de synthese verloopt. Bij den mensch blijkt dit o.a. uit de analyse van bepaalde vormen van „optisch bedrog" en uit de waarneming van de z.g. „oergestalten" (Köhler en Fuchs; iets hierover bij Jordan, Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych. 29, 1936, blz. 198); echter zijn, over het algemeen, de schema's bij den mensch veel meer gedifferentieerd dan bij de dieren. [2])

Het „syncretisme" van de dierlijke waarneming komt o.a. hierin tot uitdrukking, dat het dier niet, zooals de mensch, reageert op de waarneming van bepaalde voorwerpen, maar vooral op de waar-

neming van bepaalde situaties, op bepaalde structuren van het waarnemingsveld.

De in het bovenstaande, zeer kort, besproken onderzoekingen lijken mij voor de beantwoording van het hier te behandelen probleem van groot belang, ondanks het mysticisme, waartoe ze vaak aanleiding gegeven hebben (kritiek hierop bij Neurath, „Einheitswissenschaft und Psychologie" Weenen 1933; cf. E. W. Beth, Alg. Ned. Tijdsch. v. Wijsb. en Psych. 29, 1936, blz. 121).

Ik wil nu iets nader ingaan op het introspectief onderzoek van de analyse onzer bewustzijnsinhouden. Een eenvoudig voorbeeld van een dergelijke analyse vinden we in het vaststellen van de noten, „waaruit" een accoord „bestaat". Wanneer wij op een piano gelijktijdig de noten van een drieklank, b.v. c-e-g, aanslaan, dan horen wij een bepaald „accoord", dat wij kunnen „herkennen" als gelijksoortig met andere drieklanken, b.v. g-b-d, bes-d-f, enz. Een dergelijk accoord is een typisch voorbeeld van een „Gestalt" of „totaliteit" (cf. Beth, l.c.): de eraan toekomende „Gestaltqualität wordt als zodanig herkend, zonder dat wij vooraf de samenstellende noten behoeven te onderscheiden. Voor wij nu de samenstellende noten kunnen herkennen, moeten we door den klank teweeggebrachte gewaarwording analyseren. Dit gaat zó in zijn werk, dat wij de afzonderlijke tonen in onderlinge opeenvolging waarnemen en dat we ons tevens bewust worden van een nauw verband van deze opeenvolgende tonen met het eerst waargenomen accoord (de *verklaring* van dit proces bestaat hierin, dat blijkbaar het waarnemen van het accoord door associatie een herinnering aan het horen van een bepaalde opeenvolging van tonen teweegbrengt). Ik wil er, voor ik verder ga, nog eens even op wijzen, dat het hier nog niet de plaats is, in te gaan op de vraag, of het vermogen, bewustzijnsinhouden te analyseren geheel of gedeeltelijk aangeboren is, dan wel, b.v. onder invloed van het gebruik van de taal, wordt verworven.

Het zal wel geen nader betoog behoeven, dat in grote trekken het verloop van de analyse in alle gevallen hetzelfde is; als voorbeeld noem ik de vormwaarneming. Wij kunnen bij optische waarneming bepaalde vormen (cirkel, vierkant) „herkennen", wij kunnen ook deze vormen analyseren. Ook bij deze analyse ontstaat de gewaarwording van een successie.

Een bijzonder interessant geval is de analyse van een „Gestalt", die niet volkomen momentaan geapercipieerd wordt, maar die uit zich zelf reeds een zekere successie omvat, zoals b.v. een melodie. Deze aan de „Gestalt" eigen successie uit zich bij de analyse daarin, dat de volgorde van de componenten steeds dezelfde is, niet, zoals bij de analyse van een accoord, binnen zekere grenzen gewijzigd kan worden. Vindt geen analyse plaats, dan worden we ons in den regel van het „bestaan" van een successie in de aperceptie niet bewust; de gewaarwording van een successie ontstaat dan, wanneer de waarneming van de melodie plotseling wordt gestoord of onderbroken; de melodie valt dan vrijwel automatisch (d.w.z. zonder, dat een opzettelijke analyse plaats vindt) uiteen in een waargenomen en een niet-waargenomen gedeelte. In het algemeen kan men zelfs zeggen, dat de aanleiding tot het in-werking-treden van de analytische functie van ons bewustzijn steeds is gelegen in een onderbreking van den normalen gang van de aperceptie; eerst bij een storing in de regelmatige successie onzer gewaarwordingen worden wij ons van die successie bewust!

De door de analyse ontstane veelheid van indrukken, die intussen (tengevolge van de synthese der apprehensie) natuurlijk onmiddellijk tot een nieuwe veel-eenheid samenvloeit, duiden wij aan als het *ik-nu-complex.* [3])

GETALBEGRIP EN TIJDSAANSCHOUWING.

Het schijnt, dat de pogingen, die men heeft aangewend, om de wiskunde „zuiver logisch" op te bouwen, de onvermijdelijkheid hebben aangetoond (cf. E. W. Beth, Travaux IXe Congrès Int. de Phil. fasc. VI p. 161, Paris 1937) van een beroep op bepaalde aprioristische beginselen, die, zoals in het volgend hoofdstuk nader zal worden uiteengezet, a fortiori een intuitief karakter bezitten. Ik laat hier nu, kortheidshalve, die onderzoekingen op het gebied van de metamathesis (syntaxis, semantiek), die zich bedienen van uit intuitionistisch gezichtspunt ontoelaatbaar te achten bewijsmiddelen, als in elk geval van slechts secundaire betekenis, verder buiten beschouwing (zie ter nadere rechtvaardiging het „Aanhangsel"). Wat er overblijft (dat zijn in hoofdzaak onderzoekingen van Hilbert, Bernays, Ackermann, Von Neumann,

Herbrand, Gentzen), blijkt vrijwel geheel te berusten op bewijsmethoden, die verwant zijn met de *arithmetische recurrentie.* Alleen het recente bewijs van Gentzen voor de contradictieloosheid van de „reine Zahlentheorie" doet bovendien een beroep op bewijsmiddelen, die nauw verband houden met de intuitionistische theorie van de *transfinite inductie.*

Om begrijpelijke redenen zal ik me moeten beperken tot het geven van enkele beschouwingen over de arithmetische recurrentie en over de daarmee verwante methoden, die men in de metamathesis toepast.

De in de metamathesis toegepaste methoden (cf. E. W. Beth, Christiaan Huygens XIV blz. 141) maken op het oog den indruk, generalisaties te zijn van de arithmetische recurrentie (zie E. W. Beth, „Rede en Aanschouwing in de Wiskunde" blz. 99 v.); zij zijn daarvan echter slechts generalisaties in denzelfden beperkten zin, als waarin de n-dimensionale meetkunde een generalisatie is van de l-dimensionale; evenals de objecten en de begrippen van de n-dimensionale meetkunde zich definitorisch laten invoeren, wanneer die van de l-dimensionale meetkunde bekend worden ondersteld, laten de objecten en begrippen van de metamathesis zich in arithmetische termen definiëren. De gegeneraliseerde arithmetiek is dus een onderdeel van de gewone. Dit kan b.v. worden aangetoond met behulp van de door Gödel ingevoerde methode van de „arithmetisatie" van de metamathesis, die bestaat in het opstellen van een systeem van definities van de juist beschreven soort. Deze onderzoekingen hebben aanleiding gegeven tot het nader analyseren van het begrip „berekenbaar", dat door Gödel door middel van zijn begrip „recursief", door Church met behulp van zijn begrip „λ-definieerbaar" nader is gepreciseerd. Voor ons zijn thans deze onderzoekingen, die een zuiver formalistisch karakter bezitten, van minder belang.

We kunnen in elk geval vaststellen, dat de arithmetische recurrentie voor de metamathesis en voor de intuitionistische wiskunde de rol speelt van een a priori in den zin, waarin die term in het volgend hoofdstuk zal worden gepreciseerd. Waarop berust nu de *bewijskracht* van de recurrente methoden?

In deze formulering is de vraag natuurlijk misleidend. Immers, stelt men ten aanzien van een of ander onderdeel van de wiskunde de vraag naar de bewijskracht van de aldaar toegepaste methoden,

dan bedoelt men meestal, een axiomatisch onderzoek van die methoden uit te lokken, een onderzoek dus naar de formele structuur van de redeneringen, waartoe de toepassing van die methoden aanleiding geeft. Een dergelijke interpretatie treft natuurlijk den zin van onze probleemstelling in geen enkel opzicht: we vragen hier geen axiomatisch onderzoek van de recurrente methoden, we stellen vast, dat elk consequent doorgevoerd axiomatisch onderzoek van recurrente methoden gebruik maakt; we vragen ons nu af: in welk opzicht draagt toepassing van deze methoden bij tot de zekerheid, tot de betrouwbaarheid, tot de overtuigingskracht van het axiomatisch onderzoek? Anders gezegd: waarop berust de *evidentie,* die aan de recurrente methoden in zo hoge mate eigen is, en die andere bewijsmethoden, b.v. die, welke gebruik maken van het keuzeaxioma, voor zo velen missen? Ik heb in mijn dissertatie „Rede en Aanschouwing in de Wiskunde" (blz. 98/100) een antwoord op deze vraag gegeven, dat aan de volgende beschouwingen ten grondslag moge worden gelegd.

Naar mijn opvatting ontlenen de recurrente methoden haar evidentie aan het principe, volgens hetwelk onze geest de objecten van die methoden, b.v. de natuurlijke getallen opbouwt. Onze geest schept de natuurlijke getallen successievelijk, en deze schepping of opbouw wordt eigenlijk bij elke telling opnieuw verricht. Deze opbouw schijnt volgens bepaalde vaste wetten, volgens een bepaald vast principe te geschieden; dit geeft ons de overtuiging, dat deze opbouw bij herhaling steeds op dezelfde wijze geschiedt, en dit is weer de grond voor onze mening, dat aan onze inzichten omtrent de natuurlijke getallen een grote mate van zekerheid toekomt.

Het vaste principe, dat aan de opbouw van de natuurlijke getallen ten grondslag ligt, schijnt te wortelen in zeer diepliggende eigenschappen van onzen geest; dit is weer in overeenstemming met de fundamentele betekenis van de recurrente methoden voor de wiskunde, d.w.z., voor de wetenschap in het algemeen; in de terminologie van het volgend hoofdstuk kunnen we zeggen: ons subjectief vertrouwen in de evidentie van de recurrente methoden is in overeenstemming met het objectief vaststelbaar aprioristisch karakter van die methoden.

Welke eigenschappen van onzen geest zijn het nu, die ten grondslag liggen aan den opbouw van de natuurlijke getallen, en die

daardoor mede aansprakelijk zijn voor de evidentie, die wij gewoon zijn, aan de recurrente methoden toe te kennen? Of, om aan bovengenoemde dissertatie een term te ontlenen, wat is de aanschouwelijke of subjectieve grondslag van de arithmetische evidentie?

De opbouw van de natuurlijke getallen geschiedt, zoals trouwens elke vorm van menselijke geesteswerkzaamheid, in den tijd. Daar nu de subjectieve evidentie van de recurrente methoden in de rekenkunde berust op de voorstelling, dat de bedoelde opbouw volgens bepaalde vaste wetten geschiedt, krijgen we hier te analyseren de voorstelling van een regelmatige opeenvolging in den tijd, zoals die ook aan het causaliteitsbegrip ten grondslag ligt. [4])

Over het tot-stand-komen van de voorstelling van een (al of niet regelmatige) opeenvolging in den tijd heb ik reeds in het eerste hoofdstuk gesproken; ik wil daaraan nog enkele opmerkingen toevoegen. Men kan zich (zuiver hypothetisch) een bewustzijnsniveau voorstellen, waarop noch van herinneringen, noch van verwachtingen sprake is, een niveau dus, waarop de geest uitsluitend de indrukken van het ogenblik apercipieert. Een voorstelling van opeenvolging kan hier natuurlijk niet ontstaan.

Ten tweede kan men onderstellen, dat er wel, naast de momentane indrukken (waarnemingen), herinneringen en verwachtingen bestaan, maar dat de momentane indrukken, de waarnemingen, steeds met de verwachtingen overeenstemmen. Het is duidelijk, dat men zich in dat geval van het onderscheid tussen waarnemingen en herinneringen, geen rekenschap zal kunnen geven. Men wordt zich klaarblijkelijk in dat geval van de successie zijner indrukken niet bewust, een tijdsvoorstelling kan niet tot stand komen; streng genomen verliest het onderscheid tussen herinneringen, waarnemingen en verwachtingen in dit geval zijn zin.

We kunnen hieruit blijkbaar concluderen, dat uit het bestaan van de gewaarwording ener successie volgt het bestaan van een zinvolle onderscheiding tussen herinneringen, waarnemingen, verwachtingen, waarbij dan zeker de waarneming niet steeds in overeenstemming is met de verwachtingen. Daarbij valt dan nog weer op te merken, dat het begrip „verwachting" óók dan weer allen zin verliest, als de waarnemingen niet *doorgaans* in overeenstemming zouden zijn met de verwachtingen; nauwkeuriger uitgedrukt: wanneer men geen onderscheid zou kunnen maken tussen

waarnemingen, die wèl, en waarnemingen, die niet met de verwachtingen in overeenstemming zijn. Dus: het bestaan van de gewaarwording ener successie sluit in de mogelijkheid van een zinvolle onderscheiding van onze bewustzijnsinhouden in herinneringen, waarnemingen en verwachtingen, en tevens van een zinvolle onderscheiding van onze waarnemingen in zulke, die wél, en zulke, die niet met onze verwachtingen in overeenstemming zijn.

Met andere woorden: bestaat de gewaarwording ener successie, dan bestaat noodzakelijkerwijs tevens de voorstelling van een mogelijke regelmaat in die successie, een regelmaat, die „in werkelijkheid" al of niet tot verwezenlijking komt.

Hieruit volgt weer, dat de momenten, die onderscheiden kunnen worden aan de voorstelling van een regelmaat in de successie, in wezen geen andere zulen zijn, dan die men kan onderscheiden aan de gewaarwording van de successie zelf; deze momenten hebben we in het eerste hoofdstuk leren kennen in de synthetische functies van de apprehensie, de reproductie, en de recognitie. [5])

Ik wil nu ten slotte nog de proef op de som leveren, door omgekeerd aan te tonen, dat de genoemde synthetische functies van onzen geest inderdaad in staat zijn, de voorstelling van een regelmaat in de successie, van een wetmatigheid in den tijd, op te bouwen.

De voorstelling van een bepaalde regelmaat in den tijd bestaat hierin, dat de waarnemingsreeksen worden onderscheiden in zulke, die met een wet in overeenstemming, en zulke, die dat niet zijn. Hiertoe is ten eerste nodig, dat het herinneringsbeeld van een dergelijke waarnemingsreeks als één geheel wordt overzien; ten tweede, dat dit herinneringsbeeld wordt herkend, als al of niet tot een bepaalde klasse van herinneringsbeelden te behoren (d.w.z., als al of niet geassocieerd te zijn aan een bepaald complex van herinneringsbeelden). In het eerste hoofdstuk is aangetoond, dat de synthesen der apprehensie, der reproductie, en der recognitie het bewustzijn inderdaad hiertoe in staat stellen. De synthese der apprehensie verenigt de opeenvolgende waarnemingen tot de veeleenheid van de aanschouwing, in dit geval tot de aanschouwing van een successie, van een waarnemingsreeks; ze kan deze waarnemingsreeks met andere, in samenhang met de eerste geapprehendeerde, waarnemingen of waarnemingsreeksen tot hogere veeleenheden, tot complexen verenigen; met gereproduceerde

waarnemingsreeksen kan de juist geapprehendeerde reeks worden geassocieerd onder invloed van de synthetische functie van de recognitie.

Zo ontstaan dus bepaalde complexen van waarnemingsreeksen; om nu na te gaan, of een bepaalde waarnemingsreeks tot zulk een complex behoort, zullen die reeks en dat complex onder invloed van de synthese der reproductie opnieuw, dus als herinneringsbeeld tot bewustzijn moeten komen; daarna moet worden nagegaan, of de waarnemingsreeks tot het gereproduceerde complex behoort: hier treedt weer de synthese der recognitie in werking.

Hiermee is dus de proef op de som geleverd; met nadruk wil ik er nogmaals op wijzen, dat de hier geschetste psychische processen zich noodzakelijk aan de introspectie onttrekken; hun „bestaan" kan slechts langs reconstructieven weg worden aangetoond. [6])

AANHANGSEL.

Dit vindt zijn nadere rechtvaardiging in de overweging, dat een onderzoek naar de grondslagen van de wiskundige denkwijze (en zo'n onderzoek is hier aan de orde) noodzakelijk moet uitgaan van de intuitief gerechtvaardigde wiskunde, als hoedanig naar mijn opvatting alleen de intuitionistische wiskunde kan worden aangemerkt, die tevens moet optreden als subjectieve grondslag voor de geformaliseerde wiskunde. Men zou echter enig gewicht kunnen hechten aan enkele door P. Bernays (Travaux . . . . p. 104/110) aangevoerde bedenkingen, om welke reden ik deze hier wil aanhalen en bespreken.

(p. 106) „Es empfiehlt sich, die Unterscheidung von „arithmetischer" und „geometrischer" Anschauung nicht nach den Momenten des Räumlichen und Zeitlichen, sondern im Hinblick auf den Unterschied des Diskreten und Kontinuierlichen vorzunehmen. Danach ist arithmetisch die Vorstellung einer aus diskreten Bestandteilen zusammengesetzten Figur, in welcher die Bestandteile selbst entweder überhaupt nur nach ihrer Stellung zur Gesamtfigur oder nach gewissen eigens herausgehobenen gröberen Unterscheidungsmerkmalen betrachtet werden, ferner auch die Vorstellung eines an einer solchen Figur zu vollziehenden formalen Prozesses, der nur in Hinsicht auf die Veränderung, die er bewirkt, betrachtet wird. Geometrisch dagegen sind die Vorstellungen von stetiger

Veränderung, von stetig variierbarer Grösse, ferner topologische Vorstellungen wie die von Linien- und Flächengestalten."

(p. 108) „Die im Sinne der in 1. genannten Zielsetzung (einer nach arithmetischer Evidenz orientierten Mathematik) von Kronecker begonnene und von Brouwer durchgeführte Begründung eines erheblichen Teiles der vorhandenen Mathematik hat die Mathematiker nicht zur Annahme des methodischen Standpunktes der arithmetischen Evidenz bekehrt. Die Gründe dafür mögen die folgenden sein:

a) Wer in der Mathematik Anschaulichkeit sucht, der wird die restlose Eliminierung der geometrischen Anschauung als unbefriedigend und künstlich empfinden. Tatsächlich gelingt auch die Reduktion des Stetigen auf das Diskrete nur in einem angenäherten Sinn. Wer andererseits scharfe Begrifflichkeit anstrebt, der wird die Methoden bevorzugen, welche von Standpunkt der Systematik die günstigsten sind.

b) Bei dem Brouwer'schen Verfahren werden in die Sprache der Mathematik Unterscheidungen eingeführt und spielen eine wesentliche Rolle, deren Bedeutsamkeit nur vom Standpunkt der Syntax dieser Sprache ersichtlich ist. Die von Brouwer behauptete Ungültigkeit des „tertium non datur" kann in präziser Weise nur als *syntaktischer* Sachverhalt, nicht als ein solcher der mathematischen Gegenständlichkeit selbst konstatiert selbst konstatiert werden."

Tegen deze beschouwingen kan van intuitionistisch standpunt o.a. het volgende worden aangevoerd.

ad a) De reductie van het continue tot het discrete is door de neo-intuitionisten van de school van Brouwer nooit beproefd, wel o.a. door de Cantoristen; integendeel zijn laatstbedoelde pogingen door Brouwer („Over de Grondslagen der Wiskunde", blz. 150) en later door Weyl bestreden. Hiermee is in overeenstemming, dat Brouwer niet tweeërlei wiskundige aanschouwing onderscheidt, doch uitsluitend één oer-intuitie der wiskunde erkent, die hij nader omschrijft als „een eenheid van continu en discreet". „Waar dus in die oer-intuitie continu en discreet als onafscheidelijke complementen optreden, beide gelijkgerechtigd en even duidelijk, is het uitgesloten, zich van een van beide als oorspronkelijke entiteit vrij te houden, en dat dan uit het op zichzelf gestelde andere op te bouwen."

Daar nu de door Bernays voorgestelde onderscheiding van een arithmetische en een geometrische aanschouwing, zoals in het bovenstaande ondubbelzinnig tot uitdrukking wordt gebracht, voor het neo-intuitionisme niet aanvaardbaar is, kan er a fortiori van een „restlose Eliminierung" van de laatste uit de intuitionistische wiskunde geen sprake zijn.

Verder gaat het natuurlijk geenszins aan, de wiskundigen te splitsen in één groep, die „Anschaulichkeit", en één, die „scharfe Begrifflichkeit" nastreeft; de grootste groep is die van de opportunisten, die zich zonder consequentie van beide *bedienen;* en dan zijn er de intuitionisten, die beide gelijkelijk nastreven. Men kan zelfs zeggen: voor den intuitionist vormen „Anschaulichkeit" en „scharfe Begrifflichkeit" geen tegenstelling; hij streeft juist de synthese van beide na. „Anschauungen ohne Begriffe sind Blind" (Kant).

ad b) Allereerst moet worden opgemerkt, dat Brouwer reeds in „Over de Grondslagen der Wiskunde" (blz. 125 vv.) de eigenlijke wiskunde heeft gescheiden van het wiskundig bekijken van de taal der wiskunde; hij duidde dit aan als „logistiek", men zegt thans liever „logische syntaxis". Hoewel toen nog niet bekend was, dat de taal van de wiskunde niet tevens de syntaxis tot uitdrukking kon brengen (Gödel), waarschuwde hij zelfs reeds tegen een overmatig gebruik van logische woorden in de wiskundige taal.

Volgens Brouwer behoren de logische principes niet tot de wiskunde, maar tot de syntaxis van de wiskundige taal. Het onder b) genoemde feit kan dus zeker niet in het nadeel van het van het neo-intuitionisme worden uitgelegd: het bevestigt de juistheid van Brouwer's overwegingen.

Het verwerpen van het „tertium non datur" is echter, hoewel het inderdaad geen directe betrekking heeft op de wiskundige „Gegenständlichkeit", niet te beschouwen als een zuiver syntactische aangelegenheid. Immers, het intuitionisme kan niet het syntactisch „Toleranzprinzip" van Carnap aanvaarden, maar is steeds verplicht, de wiskundige taal aan het wiskundige denken te toetsen („significa"). Deze toetsing nu kan het „tertium non datur" niet doorstaan, zodat het in zijn algemene geldigheid als syntactische regel verloren gaat.

Uit Bernays' beschouwingen is niet af te leiden, in hoeverre

hij de hierboven besproken bedenkingen tegen het neo-intuitionisme voor eigen rekening neemt; vast staat wel, dat hij er een zeker gewicht aan hecht. Naar mijn gevoelen ten onrechte: uit het bovenstaande zal gebleken zijn, dat de bedoelde bedenkingen hun oorsprong vinden in bepaalde misvattingen ten aanzien van de grondslagen van het intuitionistisch standpunt, en dat de daarbij aangevoerde feiten met dit standpunt volledig in overeenstemming zijn en zelfs in een aantal gevallen voor het eerst door Brouwer gesignaleerd.

Ook na Bernays' rede blijft er alle aanleiding bestaan, de intuitionistische wiskunde te beschouwen als het meest aan de mathematische aanschouwing georienteerd en dus tevens als een toetssteen voor de meer geformaliseerde systemen en voor de metamathematische (syntactische, semantische) onderzoekingen daarover.

A PRIORI EN A POSTERIORI.

Toen de steller van de hier te behandelen vraag tegenover elkaar zette het (eventueel ten dele) intuitief en het (eventueel ten dele) empirisch karakter van de onderscheidene stadia van het subjectieve tijdsbegrip, heeft hij zonder twijfel mede gedacht aan de wijsbegeerte van Kant. In dit verband moet daarom even worden opgemerkt, dat bij Kant intuitie en empirie geen tegenstelling vormen; tegenover de intuitie staat bij hem immers het intellect (met de rede), tegenover de empirie daarentegen het a priori. Volgens Kant bestaan er dus vier soorten kenniselementen

I intuitief a priori
II intuitief a posteriori
III intellectueel a priori
IV intellectueel a posteriori.

Hierbij valt op te merken, dat voor Kant, evenals voor ons op het ogenblik, uitsluitend de synthetische kenniselementen van betekenis waren. Wij laten daarom, waar we ze tegenkomen, de analytische kenniselementen eenvoudig buiten beschouwing.

In een ander opzicht hebben de moderne onderzoekingen echter een zeer belangrijke afwijking van de door Kant gegeven indeling van de synthetische kenniselementen teweeggebracht. Ze hebben nl. de intellectuele kenniselementen deels tot intuitieve, deels

tot de analytische kenniselementen, (d.w.z. tot kenniselementen, die betrekking hebben op regelmatigheden in de taal) leren herleiden.

Een voorbeeld levert het oorzaak-begrip, dat uiteenvalt in een intuitieve component, die herleid kan worden tot de gewaarwording van een regelmatige opeenvolging in den tijd (Hume-Brouwer) en een analytische component, die betrekking heeft op de wijze, waarop wij de bedoelde gewaarwording met behulp van de taal tot uitdrukking brengen.

De herleiding van alle synthetische kenniselementen tot intuitieve, die op dergelijke wijze kan worden uitgevoerd, heeft tengevolge, dat in de plaats van de door Kant gegeven indeling van de synthetische kenniselementen in vier soorten een eenvoudige dichotomie treedt. Tegenover het intuitief a priori staat het intuitief a posteriori, of, om met den steller van de prijsvraag te spreken, tegenover de intuitie staat de empirie.

Wij zullen nu moeten trachten, te komen tot een zuiver begrip van de tegenstelling a priori-a posteriori; gemakkelijk is dit niet, want deze tegenstelling is een van de meest omstreden onderdelen van Kant's kennistheorie, zowel wat de interpretatie, als wat de waardering betreft.

De meest voor de hand liggende verklaring bestaat hierin, dat men de genoemde tegenstelling identificeert met de door Descartes op den voorgrond geplaatste tegenstelling van aangeboren en verworven waarheden; tot deze interpretatie geeft Kant ruimschoots aanleiding, zoals Vaihinger (Commentar II S. 89) uitvoerig uiteenzet. Intussen kan men toch uit het verband wel opmaken, dat Kant eigenlijk iets anders bedoelt.

Voor Kant is al onze kennis zowel aangeboren als verworven: aangeboren als mogelijke, verworven als werkelijke kennis. Dat onze kennis als mogelijkheid aangeboren moet zijn, is een trivialiteit, die geen nadere toelichting nodig heeft. Dat naar zijn mening alle elementen van onze kennis ons door ervaring bewust worden, heeft Kant verschillende malen ondubbelzinnig uitgesproken.

„Dass alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anfange, daran ist gar kein Zweifel; denn wodurch sollte das Erkenntnisvermögen sonst zur Ausübung erweckt werden ....?" (B 2).

Dat wil echter nog niet zeggen, dat al de kenniselementen, waar-

van wij ons tengevolge van onze ervaring *bewust* worden, ook werkelijk in de ervaring hun *oorsprong* hebben. [7])

„Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis *mit* der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle *aus* der Erfahrung. Denn es könnte wohl sein, dass selbst unsere Erfahrungserkenntnis ein Zusammengesetztes aus dem sei, was wir durch Eindrücke empfangen, und dem, was unser eigenes Erkenntnisvermögen (durch sinnliche Eindrücke bloss veranlasst) aus sich selbst hergibt, welchen Zusatz wir von jenem Grundstoffe nicht eher unterscheiden, als bis lange Uebung uns darauf aufmerksam und zur Absonderung desselben geschickt gemacht hat.

Es ist also wenigstens eine der näheren Untersuchung noch benötigte und nicht auf den ersten Anschein sogleich abzufertigende Frage: ob es ein dergleichen von der Erfahrung und selbst von allen Eindrücken der Sinne unabhängiges Erkenntnis gebe. Man nennt solche Erkenntnisse *a priori* und unterscheidet sie von den *empirischen,* die ihre Quellen *a posteriori,* nämlich in der Erfahrung, haben" (B 2).

De functie van onze kenniselementen a priori (waarvan de existentie voorlopig in het midden moet worden gelaten) is volgens Kant deze, dat ze uitdrukking geven aan de „Bedingungen a priori aller Erfahrungserkenntnis" (A 93), aan de „Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung überhaupt" (A 158).

Vóór hij echter overgaat tot het opsporen van de synthetische kenniselementen a priori, formuleert Kant een kriterium, waarmee men de kenniselementen a priori van alle overige kan onderscheiden.

„Notwendigkeit und strenge Allgemeinheit sind also sichere Kennzeichen einer Erkenntnis a priori, und gehören unzertrennlich zueinander" (B 4).

Hier ligt nu het voornaamste aangrijpingspunt voor de kritiek op de wijsbegeerte van Kant. Kon Kant nog, voor een onbetwijfelbaar voorbeeld van een wetenschap, die aan de door hem voor kennis a priori gestelde kriteria voldeed, verwijzen naar de wiskunde, de nieuwere kritiek heeft ons juist op dit punt uiterst sceptisch gemaakt. Wij beseffen weliswaar, dat het zeer moeilijk is, de noodzakelijkheid en de strenge algemeenheid van de intuitieve theorie van de natuurlijke getallen in twijfel te trekken, of zelfs

daartegen redelijke bezwaren aan te voeren, wij beseffen echter ook, dat het onmogelijk is, aan onze overtuigingen in dit opzicht een afdoende fundering te geven. In een van de belangrijkste gevallen kàn dus het kriterium van Kant, streng en principieel genomen, niet worden toegepast.

Toch komt het me voor, dat het mogelijk is, aan dit bezwaar tegemoet te komen, en tegelijk de grondgedachte van Kant's systeem te handhaven. Daartoe is het voldoende, de tegenstelling a priori-a posteriori op te vatten als een relatieve in plaats van als een absolute tegenstelling. Deze opvatting is zonder enigen twijfel niet die van Kant, ze staat echter toe, aan het grootste deel van Kant's wijsbegeerte een ook heden nog houdbaren zin te geven.

Ten eerste immers is het volkomen redelijk, het begrip „Bedingung der Möglichkeit" niet absoluut, maar relatief op te vatten. In dit verband moge ik wijzen op enkele voorbeelden, die ik aan de prae-relativistische physica ontleen. In de klassieke physica kan men de mechanica opvatten als a priori ten opzichte van de electriciteitsleer. Ten eerste kan men van de electrische verschijnselen eerst dan ervaring opdoen, wanneer men de mechanische grondbegrippen reeds bezit. Want de electrische verschijnselen worden geordend met behulp van mechanische begrippen als kracht en arbeid. De mechanica vormt dus voor de electriciteitsleer een „Bedingung der Möglichkeit der Erfahrung". Verandert men de begrippen van de mechanica, dan zullen noodzakelijkerwijs ook de begrippen van de electriciteitsleer een verandering ondergaan. Evenzo veroorzaakt een wijziging in de wetten van de mechanica een verandering in de wetten van de electriciteitsleer. Hierbij valt op te merken, dat bij de bedoelde verandering de structuur van het systeem van de wetten en begrippen der electriciteitsleer geheel ongewijzigd zal kunnen blijven; in dat geval echter verandert de interpretatie van dat systeem. Daarentegen behoeft (altijd van het standpunt van de klassieke physica) een verandering in de begrippen en wetten van de electriciteitsleer nog geen verandering in de begrippen en wetten van de mechanica ten gevolge te hebben. De klassieke mechanica is ten opzichte van de klassieke electriciteitsleer in dien zin als a priori te beschouwen, dat in het kader van de klassieke mechanica verschillende vormen van de electriciteitsleer mogelijk zijn, waarvan er „toevallig" (d.w.z. a posteriori,

op grond van de empirie) slechts een verwerkelijkt blijkt te worden.

Op volkomen dezelfde wijze is de euclidische meetkunde a priori ten opzichte van de klassieke mechanica, de analyse a priori ten opzichte van de euclidische meetkunde. Het zal na het voorgaande niet nodig zijn, deze bewering nog nader te staven.

Intussen moet ik nog wijzen op het feit, dat er, wanneer we op grond van de empirie naast de mechanica een bepaalde, relatief contingente electriciteitstheorie plaatsen, wellicht toch nog een beroep wordt gedaan op aprioristische beginselen, die buiten de mechanica liggen (b.v. op het causaliteitsbeginsel of op statistische beginselen). Hetzelfde is denkbaar bij de overgang van de euclidische meetkunde op de mechanica, enz.

Dit neemt niet weg, dat er, op grond van bovenstaande beschouwingen, alle aanleiding bestaat, de tegenstelling a priori-a posteriori in twee opzichten te relativeren.

i) Men kan de term a priori zinvol zo gebruiken, dat een bepaald wetenschapsgebied a priori wordt genoemd *ten opzichte* van een ander.

ii) In dat geval is het antwoord op de vraag, òf een bepaald wetenschapsgebied a priori is ten opzichte van een ander, mogelijkerwijs afhankelijk van het ontwikkelingsstadium van de wetenschap.

Bij deze herinterpretatie van de termen „a priori" „a posteriori" wordt de allure van het kriticistisch begripssysteem wel ietwat bescheidener. Toch blijft de onderscheiding van a priori en a posteriori voor de wetenschapsleer van zeer veel belang. Ze maakt immers een hiërarchische ordening van de verschillende wetenschapsgebieden mogelijk; dat een dergelijke ordening ten gevolge van de voortschrijdende ontwikkeling van de wetenschapsgebieden veranderingen zal ondergaan, is natuurlijk niet verwonderlijk (zie in overeenstemming hiermee: E. W. Beth, „Klassieke en moderne scheikunde", Ann. crit. Phil. V, 1935).

Samenvattend zal ik de besproken herinterpretatie als volgt kunnen formuleren. Een wetenschapsgebied A is a priori ten opzichte van een wetenschapsgebied B, wanneer aan de volgende voorwaarden is voldaan: A kan onafhankelijk van B worden opgebouwd (d.w.z. geformuleerd en geinterpreteerd); B daarentegen behoeft voor zijn opbouw elementen van A; verder staat A toe,

In de maand Januari werden present-exemplaren gezonden van herdrukken van:

NOORDHOFF's **Tafel in vier decimalen.** 11e—16e duizendtal.

WISSELINK, **Vraagstukken Algebra I.** 24e druk.
WIJDENES, **Algebraische Vraagstukken II.** 8e druk.
Algebraische Vraagstukken III. 8e druk.
Beknopte Driehoeksmeting B. 8e druk.
Beknopte Rekenkunde. 3e druk.
Supp. Meetkundige Vraagstukken.
Practische Driehoeksmeting. 2e druk.
Rekenboek voor de H.B.S. I. 17e druk.
Rekenboek voor de H.B.S. II. 11e druk.
Algebra voor de H.B.S. A. 3e druk.

Wijdenes en Beth Nieuwe Schoolalgebra I 10e druk en II 9e druk zijn er niet bijgevoegd daar beide drukken onveranderd zijn en de 9de en 8ste in 1938 zijn rondgezonden. Leraren, die een pres. ex. wensen van de 10de en de 9de druk worden verzocht deze aan te vragen.

Bij al deze boeken bestaan er antwoorden. Voor docenten, die de boeken bij hun onderwijs gebruiken gratis en franco verkrijgbaar bij den uitgever.

Uitgewerkte logarithmenvraagstukken in 4 en 5 dec. bij
Algebraische Vraagstukken II en III.
Nieuwe Schoolalgebra II en III.

Deze uitwerkingen zijn niet in de handel, maar voor leraren, die de boeken op hun school gebruiken, gratis en franco verkrijgbaar bij den uitgever of bij den schrijver.

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

P. WIJDENES

De kegelsneden voor het M. O.

Inhoud. I. Meetkundige behandeling.

De parabool fig. 4—15; de ellips fig. 16—31; de hyperbool fig. 32—41; de brandpunt-richtlijn definitie; de poolvoerstraal-definitie fig. 42—50.

Dit hoofdstuk beslaat 30 blz. met 50 fig., die samen minstens 10 blz. beslaan, zodat de hele meetkundige behandeling met inbegrip van wat eenvoudige vraagstukken slechts 20 blz. telt.

II. De methode van het hellende vlak.

III. Stereometrische voortbrenging der kegelsneden.

Tezamen met 22 fig. op 18 blz.

Aanhangsel met historische aantekeningen.

Het enige werkje, dat voldoet aan de eis van het leerplan voor de vijfde klas nl. stereometrische voortbrenging van de kegelsneden.

53 blz. 75 fig., met envelop met kartonnen modellen ƒ 0.80
Leraren, die het boekje niet kennen, worden verzocht een pres. ex. aan te vragen.

Ter perse:

Differentialgeometrie

Der Kurven und Flächen und Tensor Rechnung

von Ph. Dr. VACLAV HLAVATY

Autorisierte Übersetzung in die Deutsche Sprache

von Dr. Phil. MAX PINL

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel